Om

Directionens analytiske Betegning,

et Forsøg,

anvendt fornemmelig

til

plane og sphæriske Polygoners Oplosning.

Af

Caspar Wessel, Landmaaler.

Nærværende Forsøg angaaer det Spørgsmaal, hvordan Directionen analytisk bør betegnes, eller hvordan rette Linier burde udtrykkes, naar af een eneste Ligning mellem een ubekiendt og andre givne Linier skulde kunne findes et Udtryk, der forestillede baade den ubekiendtes Længde og dens Direction.

For nogenledes at kunne besvare dette Spørgsmaal, lægger jeg til Grundvold to Sætninger, der synes mig unegtelige. Den første er: at den Directionens Forandring, der ved algebraiske Operationer kan frembringes, ogsaa bør ved deres Tegn at forestilles. Den anden: at Direction er ingen Gienstand for Algebra, uden for saavidt den ved algebraiske Operationer kan forandres. Men da den ved disse ei kan forandres (i det mindste efter den sædvanlige Forklaring), uden til den modsatte, eller fra positiv til privativ, og omvendt: saa skulde disse to Directioner alene kunne betegnes paa den bekiendte Maade, og i Hensigt til de øvrige Problemet være uopløseligt. Dette er vel ogsaa Grunden, hvorfor ingen dermed har befattet sig (*). Man har uden Trivl holdt det for utilladeligt at forandre noget i Operationernes eengang antagne Forklaring. Og derimod er intet at indvende, saalænge Forklaringen anvendes paa Størrelser i Almindelighed; men i enkelte Tilfælde, naar Størrelsernes egen Natur synes at indbyde til Operationernes nøiere Bestemmelse, og denne med Nytte kan anvendes, bør samme vel ei kaldes utilladelig; thi gaaer man fra Arithmetiken over til den geometriske Analysis, eller fra Operationer med abstracte Tal til dem med rette Linier, faaer man Størrelser at betragte, der vel kan tage imod samme, men ogsaa imod langt flere Relationer, end de, som Tallene kan have til hinanden; om man derfor nu tager Operationerne i en vidtløftigere Mening, og ei, som før, blot indskrænker dem til den Brug, at kunne foretages med Linier af samme eller modsat Retning, men udstrækker nu deres forrige indskrænkede Begreb noget videre, saa at det bliver anvendeligt, ei alene i samme Fald, som før, men ogsaa i uendelig mange flere Tilfælde; jeg siger om man tager sig denne Frihed, og dog ei derved overtræder de sædvanlige Operationsregler, saa modsiger man jo ikke derfor den første Lære om Tallene; men man udfører den kun videre, lemper sig efter Størrelsernes Natur, og iagttager den Methodens Regel, der fordrer, lidt efter lidt at giøre en vanskelig Lære fattelig. Det bliver altsaa ingen urimelig Fordring, at Operationerne anvendte i Geometrien tages i en vidtløftigere Mening, end den man i Regnekunsten gav dem; man vil ogsaa let tilstaae, at det paa den Maade maa være mueligt at frembringe uendelig mange Forandringer i Liniernes Retning. Men just derved opnaaes (som siden skal bevises) ei alene, at alle umuelige Operationer kan undflyes, og den paradoxe Sætning, at det Muelige maa undertiden søges ved umuelige Midler, kan oplyses, men ogsaa at Directionen af alle Linier i samme Plan kan udtrykkes ligesaa analytisk, som deres Længde, uden at Hukommelsen bebyrdes med nye Tegn eller Regler. Og da det synes upaatvivleligt, at geometriske Sætningers almindelige Rigtighed ofte bliver lettere at indsee, naar Directionen analytisk kan betegnes, og underkastes de algebraiske Operationsregler, end naar den ved Figurer, og kun i enkelte Tilfælde, skal fore-

(*) Uden det skulde være Magister Gilbert i Halle, hvis Priisskrivt over Calculus Situs maaskee indeholder en Forklaring over dette Emne.

forestilles: saa synes det ogsaa ei alene tilladeligt, men endog gavnligt, at betiene sig af Operationer, der udstrækkes til flere Linier, end de ligestilte (de af samme Retning) og de modsatte. Paa Grund heraf søger jeg

I.) Først at bestemme Reglerne for saadanne Operationer;

II.) Dernæst vises ved et Par Exempler deres Anvendelse, naar Linierne ere i samme Plan;

III.) Derefter bestemmes Directionen af Linier i forskiellige Planer ved en ny Operationsmethode, der ikke er algebraisk;

IV.) Ved Hielp af denne udfindes derpaa saavel plane som sphæriske Polygoners Opløsning i Almindelighed;

V.) Tilsidst udledes paa samme Maade de i den sphæriske Trigonometrie bekiendte Formler.

Dette er Hovedindholdet af denne Afhandling. Anledningen dertil var, at jeg søgte en Methode, hvorved de umuelige Operationer kunde undgaaes, og da denne var funden, anvendte jeg samme, for at overbevises om nogle bekiendte Formlers Almindelighed. Disse første Undersøgelser havde Hr. Etatsraad Tetens den Taalmodighed at giennemlæse, og denne navnkundige Lærdes Opmuntringer, Raad og Veiledning skylder jeg, saavel at dette Skrivt nu fremkommer mindre ufuldkomment, som og at det er værdiget, at optages i Samlingen af det Kongelige Videnskabers Selskabs Skrivter.

I.

Paa hvad Maade af givne rette Linier ved de algebraiske Operationer formeres andre, og fornemmelig hvad Retning og Tegn disse skal have.

Der gives homogene Størrelser, hvilke, naar de faae Sted hos samme Subject, forøge eller formindske hinanden paa den Maade alene, som Incrementer og Decrementer.

Der gives andre, som i samme Tilfælde kunne forandre hinanden paa utallige flere Maader. Af dette sidste Slags ere rette Linier.

 Saa-

Saaledes kan et Punets Afstand fra et Plan paa utallige Maader forandres derved, at Punctet beskriver udenfor Planet en meer eller mindre inclineret ret Linie.

Er nemlig denne Linie perpendicular, det er, giør Punctets Vei en ret Vinkel med Planets Axel, saa bliver Punctet i Planets Parallel, og dets Vei har ingen Virkning paa dets Afstand fra Planet.

Er den beskrevne Linie indirect, det er, giør den en skiev Vinkel med Planets Axel, saa bidrager den et mindre Stykke end sin egen Længde til Afstandens Forlængning eller Forkortning, og kan paa uendelig mange Maader forøge eller formindske Afstanden.

Er den direct, det er i Linie med Afstanden, tillægger eller fratager den samme sin hele Længde, og er i første Fald positiv, i andet privativ.

Alle de rette Linier, som af et Punct kan beskrives, ere altsaa, i Hensigt til deres Virkning paa Punctets givne Afstand fra et udenfor Linierne opstilt Plan, enten directe eller indirecte, eller perpendiculare (*), alt eftersom de tillægge eller fratage Afstanden saa meget som det Hele, eller en Deel, eller intet af deres egen Længde.

Da en Størrelse kaldes absolut, for saavidt den ei ved Relation til en anden, men umiddelbar antages given, saa kan i foregaaende Definitioner Afstanden kaldes den absolute Linie, og den relatives Bidrag til den absolutes Forlængning eller Forkortning kan kaldes den relatives Virkning.

Der gives endnu flere Størrelser end rette Linier, der kunne tage imod omtalte Relationer. Det var derfor ikke unyttigt, at forklare disse Relationer i Almindelighed, og at indlemme deres almindelige Begreb i Operationernes Forklaring; men da baade Kienderes Raad, dette Skrivts Indhold, og Foredragets Tydelighed fordre, ei at besvære Læseren med saa abstracte Begreb, befatter jeg mig kun med de geometriske Forklaringer alene, og siger derfor, at

§. 1.

(*) Indifferente var mere passende, om det ikke skurrede for meget i uvante Øren.

§. 1.

To rette Linier adderes, naar man først føier dem sammen, saaledes at den ene begynder, hvor den anden slipper, derefter drager fra de sammenføiedes første til sidste Punct en ret Linie, og antager saa denne for de sammenføiedes Sum.

Gaaer f. Ex. et Punct 3 Fod frem, og derefter 2 Fod tilbage, saa er disse to Veies Sum ikke de første 3 og sidste 2 Fod sammenføiede; men een Fod frem er Summen, for saavidt denne Vei, af samme Punct beskreven, har samme Virkning, som begge de to andre Veie.

Ligeledes naar en Triangels ene Side strækker sig fra a til b, og den anden fra b til c, maa den tredie fra a til c kaldes Summen, og maa betegnes ved $ab + bc$, saa at ac og $ab + bc$ have samme Betydning, eller $ac = ab + bc = -ba + bc$, dersom ba er det modsatte af ab. Ere de adderte Linier directe, stemmer Definitionen fuldkommen overeens med den sædvanlige. Ere de ikke directe, strider det dog ikke mod Analogien, at kalde en ret Linie to andre sammenføiedes Sum, for saavidt den har samme Virkninger, som disse. Den Betydning, jeg har givet Tegnet $+$, er heller ikke saa usædvanlig; f. Ex. i den Expression $ab + \frac{ba}{2} = \frac{1}{2}ab$ er $\frac{ba}{2}$ ingen Deel af Summen. Man kan derfor ogsaa sætte $ab + bc = ac$, uden derfor at tænke sig bc som nogen Deel af ac; $ab + bc$ er kun det Tegn, hvorved ac forestilles.

§. 2.

Naar flere end to rette Linier skal adderes, følges samme Regel; de forenes nemlig, saa at førstes sidste Punct sammenføies med det første af den anden, dennes sidste med tredies første o. s. v., derefter drages fra det Punct, hvor første begynder, til det, hvor sidste slipper, en ret Linie, og denne kaldes Summen af dem alle.

Hvad for en Linie der skal tages for den første, og hvilken for den anden, tredie o. s. v., er ligegyldigt; thi paa hvad Sted indenfor tre Planer, der giør rette Vinkler med hinanden, en ret Linie af et Punct beskrives, har denne Linie samme Virkning paa Punctets Afstand fra hver af Planerne; følgelig bidrager en een af flere adderte Linier til Positionens Bestemmelse af Summens sidste Punct ligesaa meget, naar den er den første, som naar den er den sidste, eller hvad anden Orden den har til de andre adderte; følgelig er Ordenen i rette Liniers Addition ligegyldig, og Summen bliver alletider den samme, fordi dens første Punct antages given, og det sidste faaer alletider samme Position.

Derfor kan ogsaa i dette Tilfælde Summen betegnes ved de adderte Linier forbundne med hinanden ved Tegnet +. Naar i en Fiirkant f. Ex. den første Side er dragen fra a til b, den anden fra b til c, den tredie fra c til d, men den fierde fra a til d: saa kan sættes $ad = ab + bc + cd$.

§. 3.

Er Summen af flere Længder, Breder og Høider = 0, saa er Summen af Længderne, den af Brederne, og den af Høiderne, hver især = 0.

§. 4.

Productet af to rette Linier maa i alle Maader kunne formeres af den ene Factor, som den anden er formeret af den positive eller absolute Linie, der sættes = 1, det er:

Først maa Factorerne være af den Direction, at de begge kan optages i samme Plan som den positive Unitet.

Dernæst maa i Hensigt til Længden Productet forholde sig til den ene Factor, som den anden til Uniteten; og

Endelig, dersom man giver den positive Unitet, Factorerne og Productet et fælles første Punct, skal Productet i Hensigt til dets Retning ligge i omtalte Unitets og Factorers Plan, og afvige fra den ene Factor ligesaa mange Grader, og til samme Side, som den anden Factor afviger fra Uniteten, saa at Productets Directionsvinkel, eller Afvigning fra den positive Unitet, bliver saa stor som Summen af Factorernes Directionsvinkler.

§. 5.

§. 5.

Lad $+1$ betegne den positive retlinede Unitet, og $+\varepsilon$ en vis anden Unitet, der er perpendicular paa den positive, og har samme Begyndelsespunct: saa er Directionsvinkelen af $+1 = 0$, af $-1 = 180^\circ$, af $+\varepsilon = 90^\circ$, af $-\varepsilon = -90^\circ$ eller 270°; og i Følge den Regel, at Productets Directionsvinkel er Summen af Factorernes, bliver $(+1).(+1) = +1$, $(+1).(-1) = -1$, $(-1).(-1) = +1$, $(+1).(+\varepsilon) = +\varepsilon$, $(+1).(-\varepsilon) = -\varepsilon$, $(-1).(+\varepsilon) = -\varepsilon$, $(-1).(-\varepsilon) = +\varepsilon$, $(+\varepsilon).(+\varepsilon) = -1$, $(+\varepsilon).(-\varepsilon) = +1$, $(-\varepsilon).(-\varepsilon) = -1$.

Hvoraf sees at ε bliver $= \sqrt{-1}$, og Productets Afvigning bestemmes saaledes, at ei een eneste af de almindelige Operationsregler overtrædes.

§. 6.

Cosinus til en Cirkelbue, der begynder fra det sidste Punct af dens Radius $+1$, er det Stykke af samme, eller modsatte Radius, der begynder fra Centrum, og endes perpendicular udfor Buens sidste Punct. Sinus til samme Bue drages perpendicular paa Cosinus fra sammes sidste Punct til sidste af Buen.

I Følge §. 5 er altsaa Sinus til en ret Vinkel $= \sqrt{-1}$. Lad sættes $\sqrt{-1} = \varepsilon$; lad v betegne en Vinkel, hvilken som helst; og lad $\sin. v$ bemærke en ret Linie af samme Længde som Vinkelen v's Sinus, men positiv, naar Vinkelens Maal endes i første halve Omkreds, og negativ, naar det endes i den sidste halv. saa følger af §. 4 og 5, at $\varepsilon \sin. v$ udtrykker Vinkelen v's Sinus baade i Hensigt til Direction og Længde.

§. 7.

I Overeensstemmelse med §. 1 og 6 er den Radius, som begynder fra Centrum, og afviger fra den absolute eller positive Unitet Vinkelen v, saa stor som $\cos. v + \varepsilon \sin. v$. Men i Følge §. 4 skal Productet af to Factorer, hvoraf den ene afviger fra Uniteten Vinkelen v, og den anden Vinkelen u, afvige fra samme Unitet Vinkelen $v+u$. Altsaa naar den rette Linie $\cos. v + \varepsilon \sin. v$ multipliceres med den rette Linie $\cos. u + \varepsilon \sin. u$, bliver Productet en ret Linie, hvis Directionsvinkel er $v+u$. Følgelig kan Productet efter §. 1 og 6 betegnes ved $\cos. (v+u) + \varepsilon \sin. (v+u)$.

§. 8.

Dette Product $(\cos. v + \varepsilon \sin. v) . (\cos. u + \varepsilon \sin. u)$ eller $\cos. (v+u) + \varepsilon \sin. (v+u)$ kan endnu udtrykkes paa en anden Maade, nemlig ved at addere i een Sum de partielle Producter, som udkomme, naar hver af de adderte Linier, hvis Sum udgiør den ene Factor, multipliceres med hver af dem, hvis Sum udgier den anden. Saaledes bliver $(\cos. v + \varepsilon \sin. v) . (\cos. u + \varepsilon \sin. u) = \cos. v . \cos. u - \sin. v . \sin. u + \varepsilon (\cos. v . \sin. u + \cos. u . \sin. v)$ i Følge de to bekiendte trigonometriske Formler $\cos. (v+u) = \cos. v . \cos. u - \sin. v . \sin. u$, og $\sin. (v+u) = \cos. v . \sin. u + \cos. u . \sin. v$. Disse to Formler kan med Nøiagtighed og uden stor Vidtløftighed bevises for alle Tilfælde, enten hver af Vinklerne v og u, eller een alene er positiv, negativ, større eller mindre end en ret. De Sætninger, som af samme to Formler udledes, har følgelig ogsaa deres Almindelighed.

§. 9.

$\cos. v + \varepsilon \sin. v$ er i Følge §. 7 en Cirkels Radius, hvis Længde er $= 1$, og Afvigning fra $\cos. 0°$ er Vinkelen v; deraf følger at $r . \cos. v + r . \varepsilon \sin. v$ betegner en ret Linie, hvis Længde er r, og hvis Directionsvinkel er $= v$; thi naar en retvinklet Triangels Catheter blive r gange større, saa bliver ogsaa Hypothenusen r gange større, og Vinklerne uforandrede; men Catheternes Sum er i Følge §. 1 saa stor som Hypothenusen, altsaa er $r . \cos. v + r . \varepsilon \sin. v = r (\cos. v + \varepsilon \sin. v)$. Dette er altsaa et almindeligt Udtryk for enhver ret Linie, der ligger med Linierne $\cos. 0°$ og $\varepsilon \sin. 90°$ i samme Plan, afviger fra $\cos. 0°$ Graderne v, og har Længden r.

§. 10.

§. 10.

Betegne a, b, c, d directe Linier af hvilken Længde som helst, positive eller negative, og de to indirecte $a + \varepsilon b$ og $c + \varepsilon d$ ligge i samme Plan som den absolute Unitet: saa kan deres Product findes, endogsaa naar deres Afvigning fra den absolute Unitet er ubekiendt; man behøver nemlig kun at multiplicere enhver af de adderte Linier, der udgiøre den ene Sum, med enhver af dem, som udgiøre den anden, saa vil disse Producter adderte udgiøre det søgte Product baade i Henseende til Længden og Retningen; saa at $(a + \varepsilon b) . (c + \varepsilon d) = ac - bd + \varepsilon (ad + bc)$.

Beviis. Lad Liniens $a + \varepsilon b$ Længde være A, og Afvigning fra den absolute Unitet v Grader; men Liniens $c + \varepsilon d$ Længde $= C$, og Afvigning $= u$: saa er, i Følge §. 9, $a + \varepsilon b = A . \text{cof.} v + A . \varepsilon \text{fin.} v$, og $c + \varepsilon d = C . \text{cof.} u + C . \varepsilon \text{fin.} u$, altsaa $a = A . \text{cof.} v$, $b = A . \text{fin} v$, $c = C . \text{cof.} u$, $d = C . \text{fin.} u$ (§. 3); men i Følge §. 4 er $(a + \varepsilon b) . (c + \varepsilon d) = A . C . [\text{cof.} (v + u) + \varepsilon \text{fin.} (v + u)] = A . C . [\text{cof.} v . \text{cof.} u - \text{fin.} v . \text{fin.} u + \varepsilon (\text{cof.} v . \text{fin.} u + \text{cof.} u . \text{fin.} v)]$ §. 8. Følgelig, naar isteden for $A . C . \text{cof.} v . \text{cof.} u$ sættes $a . c$, isteden for $A . C . \text{fin.} v . \text{fin.} u$ sættes $b . d$, o. s. v.: udkommer det, som skulde bevises.

Hvoraf følger, at skiøndt Summens adderte Linier ei alle ere directe, saa behøves dog ingen Undtagelse i den bekiendte Regel, hvorpaa Æqvationernes Theorie, og den om hele Functioner og deres Divisores simplices grunder sig, nemlig at naar to Summer skal multipliceres med hinanden, da maa enhver af de adderte Størrelser i den ene Sum multipliceres med enhver af de adderte i den anden. Man kan altsaa være forvisset om, at naar en Æqvation angaaer rette Linier, og dens Radix har den Form $a + \varepsilon b$: da betegnes derved en indirect Linie. Men vilde man multiplicere med hinanden rette Linier, som ikke begge kunde ligge i samme Plan med den absolute Unitet: maatte omtalte Regel tilsidesættes. Dette er Aarsagen, hvorfor jeg forbigaaer saadanne Liniers Multiplication. En anden Maade at betegne deres forandrede Retning forekommer i det følgende, §. 24-35.

§. 11.

Qvotienten multipliceret med Divisor skal være saa stor som Dividendum. Det behøver altsaa ikke Beviis, at disse Linier skal ligge i samme Plan med den absolute Unitet; thi det følger umiddelbar af Definitionen §. 4. Ligeledes indsees let, at Qvotienten maa afvige fra den absolute Unitet Vinkelen $v-u$, dersom Dividendum afviger fra samme Unitet Vinkelen v, og Divisor Vinkelen u.

Sæt f. Ex. at $A(\cos. v+\varepsilon \sin. v)$ skulde divideres med $B(\cos. u+\varepsilon \sin. u)$: da er Qvotienten $=\frac{A}{B}[\cos.(v-u)+\varepsilon \sin.(v-u)]$, fordi $\frac{A}{B}[\cos.(v-u)+\varepsilon \sin.(v-u)] \times B(\cos. u+\varepsilon \sin. u)=A(\cos. v+\varepsilon \sin. v)$, i Følge §. 7. Det er, da $\frac{A}{B}[\cos.(v-u)+\varepsilon \sin.(v-u)]$ multipliceret med Divisor $B(\cos. u+\varepsilon \sin. u)$ er saa stor som Dividendum $A(\cos. v+\varepsilon \sin. v)$; saa er ogsaa $\frac{A}{B}[\cos.(v-u)+\varepsilon \sin.(v-u)]$ den søgte Qvotient.

§. 12.

Ere a, b, c og d directe Linier, og de indirecte $a+\varepsilon b$ og $c+\varepsilon d$ ere i samme Plan med den absolute Unitet: da er $\frac{1}{c+\varepsilon d}=\frac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2}$, og Qvotienten $\frac{a+\varepsilon b}{c+\varepsilon d}=(a+\varepsilon b)\cdot\frac{1}{c+\varepsilon d}=(a+\varepsilon b)\cdot\frac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2}=[ac+bd+\varepsilon(bc-ad)]:(c^2+d^2)$; thi i Følge §. 9 kan sættes $a+\varepsilon b=A(\cos. v+\varepsilon \sin. v)$, og $c+\varepsilon d=C(\cos. u+\varepsilon \sin. u)$, altsaa $c-\varepsilon d=C(\cos. u-\varepsilon \sin. u)$, i Følge §. 3; og da $(c+\varepsilon d).(c-\varepsilon d)$ er $=c^2+d^2=C^2$ (§. 10): saa er $\frac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2}=\frac{1}{C}(\cos. u-\varepsilon \sin. u)$ §. 10, eller $\frac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2}=\frac{1}{C}(\cos. -u+\varepsilon \sin. -u)=\frac{1}{c+\varepsilon d}$ §. 11, og naar multipliceres med $a+\varepsilon b=A(\cos. v+\varepsilon \sin. v)$, udkommer $(a+\varepsilon b)\frac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2}=\frac{A}{C}[\cos.(v-u)+\varepsilon \sin.(v-u)]=\frac{a+\varepsilon b}{c+\varepsilon d}$ §. 11.

Indirecte Størrelser af denne Art har altsaa dette fælles med de directe, at naar Dividendum er en Sum af flere Størrelser, da giver enhver af disse divideret med Divisor flere Qvotienter, hvis Sum udgiør den søgte Qvotient.

§. 13.

§. 13.

Hvis m er et heelt Tal, frembringer $\cos.\frac{v}{m}+\varepsilon\sin.\frac{v}{m}$ multipliceret m gange med sig selv Potenzen $\cos.v+\varepsilon\sin v.$ (§. 7); altsaa $(\cos.v+\varepsilon\sin.v)^{\frac{1}{m}}=\cos.\frac{v}{m}+\varepsilon\sin.\frac{v}{m}$. Men i Følge §. 11 er $\cos.-\frac{v}{m}+\varepsilon\sin.-\frac{v}{m}=\frac{1}{\cos.\frac{v}{m}+\varepsilon\sin.\frac{v}{m}}=\frac{1}{(\cos.v+\varepsilon\sin.v)^{\frac{1}{m}}}=(\cos.v+\varepsilon\sin.v)^{-\frac{1}{m}}$, altsaa, enten m er positiv eller negativ, er alletider $\cos.\frac{v}{m}+\varepsilon\sin.\frac{v}{m}=(\cos.v+\varepsilon\sin.v)^{\frac{1}{m}}$, og derfor, naar m og n begge ere hele Tal, $(\cos.v+\varepsilon\sin.v)^{\frac{n}{m}}=\cos.\frac{n}{m}v+\varepsilon\sin.\frac{n}{m}v$.

Herved findes Værdien af slige Expressioner som $\sqrt[n]{(b+c\sqrt{-1})}$ eller $\sqrt[m]{(a+\sqrt[n]{(b+c\sqrt{-1})})}$; saaledes kan f. Ex. $\sqrt[3]{(4\sqrt{3}+4\sqrt{-1})}$ betegne en ret Linie, hvis Længde er $=2$, og hvis Vinkel med den absolute Unitet maales ved $10°$.

§. 14.

Naar to Vinkler have ligestore Sinus og ligestore Cosinus, da er deres Forskiel enten o, eller $\mp$ 4 rette, eller en Mangefold af $\pm$ 4 rette, og omvendt, naar to Vinklers Forskiel er enten o, eller $\pm$ 4 rette, een eller flere gange tagne, da er deres Sinus saavelsom deres Cosinus ligestore.

§. 15.

Er m et heelt Tal, og $\pi=360°$, saa har $(\cos.v+\varepsilon\sin.v)^{\frac{1}{m}}$ kun følgende m forskiellige Værdier:

$$\cos.v+\varepsilon\sin.v,\ \cos.\frac{\pi+v}{m}+\varepsilon\sin.\frac{\pi+v}{m},\ \cos.\frac{2\pi+v}{m}+\varepsilon\sin.\frac{2\pi+v}{m},\ \ldots\ldots,\ \cos.\frac{(m-1)\pi+v}{m}+\varepsilon\sin.\frac{(m-1)\pi+v}{m};$$

thi de Tal, hvormed π er multipliceret i foregaaende Række, ere i en arithmetisk Progression 1, 2, 3, 4 ... m—1. Altsaa er Summen af hver to $=$ m, naar det ene er ligesaa langt fra 1, som det andet er fra m—1, og er deres

Antal ueffent, bliver to gange det Midterste $= m$; derfor, naar adderes $\frac{(m-n)\pi+v}{m}$ til $\frac{(m-u)\pi+v}{m}$, og denne er i Rækken ligesaa langt fra $\frac{\pi+v}{m}$, som $\frac{(m-n)\pi+v}{m}$ er fra $\frac{(m-1)\pi+v}{m}$: saa er Summen $= \frac{2m-u-n}{m}\pi + \frac{2v}{m} = \pi + \frac{2v}{m}$; men at addere $\frac{(m-n)\pi}{m}$ er det samme som at subtrahere $\frac{(m-n)(-\pi)}{m}$; og da Differencen bliver π: saa har, i Følge §. 14, $\frac{(m-n).(-\pi)+v}{m}$ samme Cosinus og Sinus som $\frac{(m-u)\pi+v}{m}$; ligeledes har $\frac{(m-u).(-\pi)+v}{m}$ samme Cosinus og Sinus som $\frac{(m-n)\pi+v}{m}$; altsaa giver $-\pi$ ei andre Værdier end $+\pi$. Men at ingen af disse ere ligestore følger deraf: at Forskiellen mellem to af Rækkens Vinkler alletider er mindre end π, og aldrig $= 0$. Der findes ei heller flere Værdier ved at fortsætte Rækken; thi da bliver Vinklerne $\pi + \frac{v}{m}$, $\pi + \frac{\pi+v}{m}$, $\pi + \frac{2\pi+v}{m}$ o. s. v., altsaa i Følge §. 14 Værdierne af deres Cosinus og Sinus de samme som før. Skulde Vinklerne falde udenfor Rækken, blev i Tælleren ei π multipliceret med et heelt Tal, og Vinklerne vilde da m gange tagne ei kunne frembringe en Vinkel, der subtraheret fra v gav 0, eller $\pm\pi$, eller en Mangefold af $\mp\pi$, altsaa kunde ei heller den mte Potenz af slig en Vinkels Cosinus tilligemed Sinus blive $= \cos. v + \varepsilon \sin. v$.

§. 16.

Uden at vide Vinkelen, som den indirecte Linie $1 + x$ giør med den absolute, findes, naar Længden af x er mindre end 1, Digniteten $(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1} + \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.x^2 +$ ꝛc., og dersom denne Række ordnes efter Potenzerne af m, beholder den samme Størrelse, og forvandles til $1 + \frac{ml}{1} + \frac{m^2l^2}{1.2} + \frac{m^3l^3}{1.2.3} +$ ꝛc., hvori $l = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$ ꝛc., og er en Sum af en direct og en perpendicular Linie, kaldes den directe a, og den perpendiculare $b\sqrt{-1}$; da er b det mindste Maal til Vinkelen, som $1 + x$ giør med $+1$, og sættes

$1 +$

$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} +$ &c. $= e$, kan $(1+x)^m$ eller $1 + \frac{ml}{1} + \frac{m^2l^2}{1.2} + \frac{m^3l^3}{1.2.3} +$ &c. betegnes ved $e^{ma+mb\sqrt{-1}}$, det er $(1+x)^m$ har Længden e^{ma}, og en Directionsvinkel, hvis Maal er mb, forudsat m at være positiv eller negativ. Saaledes kan Directionen af Linier i samme Plan endnu udtrykkes paa en anden Maade, nemlig ved Hielp af de naturlige Logarithmer. Fuldstændigt Beviis for disse Sætninger vil jeg en anden gang, om det tilstædes mig, fremlægge. Nu, da jeg har giort Regnskab for, paa hvad Maade rette Liniers Sum, Product, Qvotient og Dignitet efter min Mening findes, vil jeg alene give et Par Exempler paa Methodens Anvendelse.

II.

Beviis for den Cotesianske Læresætning.

§. 17.

Jeg forudsætter som bekiendt, at naar Æqvationen $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots + sx + t = 0$ har de n Radices a, b, c ... g: da har den hele Function $z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \ldots + sz + t$ de Divisores simplices $z-a$, $z-b$, $z-c \ldots z-g$, og er et Product af dem alle.

§. 18.

Den af Cotes opfundne Sætning er følgende:

Naar Buerne ab, bc, cd, de, ea (Fig. 1) ere i Tallet n, og indeholder Graderne $\frac{360}{n} = \frac{\pi}{n}$, og Radius oa sættes $= r$, $ao = -r$, $op = z$, $po = -z$, og p er det sidste Punct i Linierne ap, bp, cp, dp, ep: saa er ap . bp . cp . dp . ep $= z^n - r^n$; Thi af §. 1 og §. 9 følger

$$\text{at } ap = z - r$$

$$bp = z - r\left(\operatorname{cos.}\frac{\pi}{n} + \varepsilon \operatorname{sin.}\frac{\pi}{n}\right)$$

$$cp = z - r\left(\operatorname{cos.}\frac{2\pi}{n} + \varepsilon \operatorname{sin.}\frac{2\pi}{n}\right)$$

dp =

$$dp = z - r\left(\cos.\frac{3\pi}{n} + \varepsilon \sin.\frac{3\pi}{n}\right)$$

$$ep = z - r\left(\cos.\frac{4\pi}{n} + \varepsilon \sin.\frac{4\pi}{n}\right)$$

$$\text{eller } ep = z - r\left(\cos.\frac{(n-1)\pi}{n} + \varepsilon \sin.\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

og af §. 15 sluttes, at Æqationens $x^n - r^n = 0$ Radices ere

$$r, r\left(\cos.\frac{\pi}{n} + \varepsilon \sin.\frac{\pi}{n}\right), r\left(\cos.\frac{2\pi}{n} + \varepsilon \sin\frac{2\pi}{n}\right), \ldots r\left(\cos.\frac{(n-1)\pi}{n} + \varepsilon \sin.\frac{(n-1)\pi}{n}\right);$$

altsaa bliver i Følge §. 17 $z^n - r^n = ap.bp.cp.dp.ep.$ Følgelig er Længden af $z^n - r^n$ saa stor som Productet af Liniernes ap, bp, cp ꝛc. Længder, §. 4.

Om plane Polygoners Opløsning.

§. 19.

Følgende af Trigonometrien bekiendte Formler anfører jeg uden Beviis.

a) $\sin.(a+b) = \sin.a.\cos.b + \sin.b.\cos.a.$

b) $\cos.(a+b) = \cos.a.\cos.b - \sin.a.\sin.b.$

c) $\sin.2a = 2\sin.a.\cos.a.$

d) $1 + \cos.2a = 2\cos.^2 a.$

e) $1 - \cos.2a = 2\sin.^2 a.$

f) $\text{tang.}\,a = \frac{\sin.2a}{1+\cos.2a}.$

g) $\sin.a + \sin.b = 2\sin.\frac{a+b}{2}.\cos.\frac{a-b}{2}.$

h) $\sin.a - \sin.b = 2\cos.\frac{a+b}{2}.\sin.\frac{a-b}{2}.$

i) $\cos.b - \cos.a = 2\sin.\frac{a+b}{2}.\sin.\frac{a-b}{2}.$

k) $\frac{\sin.a + \sin.b}{\cos.a + \cos.b} = \text{tang.}\frac{a+b}{2}.$

l) $\frac{\sin.a - \sin.b}{\cos.a + \cos.b} = \text{tang.}\frac{a-b}{2}.$

§. 20.

Til Polygoners Opløsning kan det ogsaa være tienligt at erindre sig: naar et Problem er bragt dertil, at man har $a = b\cos. u + c\sin. u$, og u alene er den ubekiendte, da kan den qvadratiske Æqvation, hvorved $\sin. u$ eller $\cos. u$ skulde findes, undgaaes ved at sætte $\frac{b}{c} = \tang. \varphi$, eller $\frac{b}{c} = \cot. \psi$. Derved findes φ eller ψ, som bliver positiv eller negativ, og behøver ei at være større end 90°. Er φ eller ψ funden, søges derefter u ved en af følgende Æqvationer: $\sin. (u + \varphi) = a \sin. \varphi : b = a\cos. \varphi : c$, og $\cos. (u - \psi) = \cos. (\psi - u) = \frac{a\cos. \psi}{b} = a\frac{\sin. \psi}{c}$; Thi naar Ledene i den givne Æqvation $a = b\cos. u + c\sin. u$ divideres med c, eller med b, og derefter isteden for $\frac{b}{c}$ sættes dens Værdie $\tang. \varphi$, eller $\cot. \psi$, og isteden for $\frac{c}{b}$ sættes $\cot. \varphi$ eller $\tang. \psi$, udkommer:

$$\frac{a}{c} = \tang. \varphi . \cos. u + \sin. u = \cot. \psi . \cos. u + \sin. u, \text{ eller}$$

$$\frac{a}{b} = \cos. u + \cot. \varphi . \sin. u = \cos. u + \tang. \psi . \sin. u.$$

Følgelig, naar Ledene i den første af disse Æqvationer multipliceres med $\cos. \varphi$, i den anden med $\sin. \psi$, i den tredie med $\sin. \varphi$, og i den fierde med $\cos. \psi$, faaes

$$\frac{a}{c}\cos. \varphi = \sin. \varphi . \cos. u + \cos. \varphi . \sin. u, \quad \frac{a}{c}\sin. \psi = \cos. \psi . \cos. u + \sin. u . \sin. \psi,$$

$$\frac{a}{b}\sin. \varphi = \sin. \varphi . \cos. u + \cos. \varphi . \sin. u, \quad \frac{a}{b}\cos. \psi = \cos. \psi . \cos. u + \sin. u . \sin. \psi;$$

altsaa er, i Følge §. 19, *a*, *b*,

$$\frac{a\cos. \varphi}{c} = \sin. (u + \varphi), \quad a\frac{\sin. \psi}{c} = \cos. (u - \psi) = \cos. (\psi - u),$$

$$\text{og } \frac{a\sin. \varphi}{b} = \sin. (u + \varphi), \quad \frac{a\cos. \psi}{b} = \cos. (u - \psi) = \cos. (\psi - u).$$

§. 21.

Naar i et plant Polygon intet mere gives end alle Vinklerne, og Siderne saa nær som tre: da er Polygonet ubestemt. Dette er tydeligt nok, hvis alle tre ubekiendte Sider følge efter hinanden; thi da kan med den ene ubekiendte

Side drages Paralleler, som skiære de to andre ubekiendte i flere Puncter, og disse tre Sider kan altsaa have utallig mange Værdier; men deraf følger ogsaa, at de tre ubekiendte Sider kan have ligesaa mange Værdier, endskiøndt de ikke følge efter hinanden; thi da Sidernes Orden er i Hensigt til deres Sum ligegyldig (§. 2): saa kan af ethvert Polygon alletider construeres et andet, hvori Sidernes Længde og Retning er den samme, men deres Orden alene forskiellig.

§. 22.

I et Polygon abcd (Fig. 2) antages den ene Side ab for absolut, og tælles fra a til b, den anden bc tælles fra b til c, cd fra c til d, da fra d til a; de efne Tal ii, iv, vi, viii bemærke Sidernes Længder; de uefne i, iii, v, vii ere deres Afvigninger fra foregaaende Sides Forlængning talte positive eller negative; f. Ex. med Solen positive, og mod Solen negative.

i', iii', v', vii' betegne $\cos.\,\mathrm{i} + \varepsilon \sin.\,\mathrm{i}$, $\cos.\,\mathrm{iii} + \varepsilon \sin.\,\mathrm{iii}$, $\cos.\,\mathrm{v} + \varepsilon \sin.\,\mathrm{v}$ o. s. v.

$\mathrm{i}^{-\prime}$, $\mathrm{iii}^{-\prime}$, $\mathrm{v}^{-\prime}$, $\mathrm{vii}^{-\prime}$ betegne $\cos.-\mathrm{i} + \varepsilon \sin.-\mathrm{i}$, $\cos.\,\mathrm{iii} - \varepsilon \sin.\,\mathrm{iii}$, $\cos.\,\mathrm{v} - \varepsilon \sin.\,\mathrm{v}$ &c.

Naar dette forudsættes, og man fra a drager Paralleler med bc, cd, da: saa følger,

I.) At første Parallel afviger fra ab Graderne iii, anden Parallel fra ab Graderne $\mathrm{iii} + \mathrm{v}$, tredie Parallel eller sidste Sides da Forlængning ae afviger fra ab Graderne $\mathrm{iii} + \mathrm{v} + \mathrm{vii}$ eller $-\mathrm{i}$. Derfor bliver alle Vinklerne tilsammen $= 0$, og Maalet til deres Sum bliver enten 0, eller ∓ 4 rette, eller en Mangefold deraf.

II.) $\mathrm{ii} + \mathrm{iv}.\mathrm{iii}' + \mathrm{vi}.\mathrm{iii}'.\mathrm{v}' + \mathrm{viii}.\mathrm{iii}'.\mathrm{v}'.\mathrm{vii}' = 0$; thi $ab + bc + cd + da = 0$ (§. 2); men $ab = \mathrm{ii}$, $bc = \mathrm{iv}.\mathrm{iii}'$ (§. 9), $cd = \mathrm{vi}[\cos.(\mathrm{iii} + \mathrm{v}) + \varepsilon \sin.(\mathrm{iii} + \mathrm{v})]$, i Følge foregaaende Nummer *I.* og §. 9, altsaa er efter §. 7 $cd = \mathrm{vi}.\mathrm{iii}'.\mathrm{v}'$, og ligeledes bevises at da er $= \mathrm{viii}.\mathrm{iii}'.\mathrm{v}'.\mathrm{vii}'$.

III.) $\mathrm{ii}.\mathrm{iii}'.\mathrm{v}'.\mathrm{vii}' + \mathrm{iv}.\mathrm{v}'.\mathrm{vii}' + \mathrm{vi}.\mathrm{vii}' + \mathrm{viii} = 0$; thi naar Ledene i foregaaende Æqvation *II.* divideres med $\mathrm{iii}'.\mathrm{v}'.\mathrm{vii}'$, udkommer i Følge §. 12 $\mathrm{ii}.\mathrm{iii}^{-\prime}.\mathrm{v}^{-\prime}.\mathrm{vii}^{-\prime} + \mathrm{iv}.\mathrm{v}^{-\prime}.\mathrm{vii}^{-\prime} + \mathrm{vi}.\mathrm{vii}^{-\prime} + \mathrm{viii} = 0$, og da ethvert

Led

Led i denne Æqvation, saa nær som det sidste, er multipliceret med en Cosinus tilligemed en Sinus, (første Led f. Ex. er $= \mathrm{ii}\,[\cos.(\mathrm{iii}+\mathrm{v}+\mathrm{vii}) - \varepsilon \sin.(\mathrm{iii}+\mathrm{v}+\mathrm{vii})]$); men Summen af alle de directe Led er ligesaavel $= 0$, som Summen af de Led, der ere multiplicerte med en Sinus, §. 3: saa bliver den totale Sum endnu $= 0$, endskiøndt hver Sinus faaer modsat Retning, og naar dette skeer, forvandles Udtrykket til det, som skulde bevises.

IV.) $\mathrm{iii}' + \mathrm{iii}^{-\prime} = 2\cos.\mathrm{iii}$, $\mathrm{iii}'.\mathrm{v}' + \mathrm{iii}^{-\prime}.\mathrm{v}^{-\prime} = 2\cos.(\mathrm{iii}+\mathrm{v})$, $\mathrm{iii}'.\mathrm{v}^{-\prime} + \mathrm{iii}^{-\prime}.\mathrm{v}' = 2\cos.(\mathrm{iii}-\mathrm{v})$, $\mathrm{iii}' - \mathrm{iii}^{-\prime} = 2\varepsilon\sin.\mathrm{iii}$, $\mathrm{iii}'.\mathrm{v}' - \mathrm{iii}^{-\prime}.\mathrm{v}^{-\prime} = 2\varepsilon\sin.(\mathrm{iii}+\mathrm{v})$, $\mathrm{iii}'.\mathrm{v}^{-\prime} - \mathrm{iii}^{-\prime}.\mathrm{v}' = 2\varepsilon\sin.(\mathrm{iii}-\mathrm{v})$, $\frac{(\mathrm{iii}')^2 - 1}{(\mathrm{iii}')^2 + 1} = \varepsilon\,\mathrm{tang}.\mathrm{iii} = \frac{1-(\mathrm{iii}^{-\prime})^2}{1+(\mathrm{iii}^{-\prime})^2}$, $\frac{(\mathrm{iii}')^2+1}{(\mathrm{iii}')^2-1} = -\varepsilon\cot.\mathrm{iii} = \frac{1+(\mathrm{iii}^{-\prime})^2}{1-(\mathrm{iii}^{-\prime})^2}$, af hvilke Formler Rigtigheden let indsees ved at sætte isteden for iii', $\mathrm{iii}^{-\prime}$, v', $\mathrm{v}^{-\prime}$ deres Værdier $\cos.\mathrm{iii} + \varepsilon\sin.\mathrm{iii}$, $\cos.\mathrm{iii} - \varepsilon\sin.\mathrm{iii}$, $\cos.\mathrm{v} + \varepsilon\sin.\mathrm{v}$, ꝛc.

§. 23.

To Æqvationer af den Form som *II.* og *III.* i foregaaende Paragraph ere tilstrækkelige til ethvert Polygons Opløsning, naar kun tre Vinkler, eller to Vinkler og een Side, eller een Vinkel og to Sider ere ubekiendte; thi i det sidste Tilfælde har den ubekiendte Vinkel samme Cosinus og Sinus, som det modsatte af de øvrige Vinklers Sum (§. 22. No. *I.*); i de to andre Tilfælde udelukkes af Æqvationerne den ene ubekiendte Vinkel, naar den betegnes ved i ligesom i §. 22. No. *II.* og No. *III.*: Følgelig indeholde Æqvationerne kun to ubekiendte Stykker. Altsaa kan findes, hvad Function det ene Stykke er af det andet ved Hielp af den ene Ligning; denne Function indført i den anden Ligning befrier samme fra det ene ubekiendte Stykke, og derved findes tilsidst Værdien af det andet.

Lad f. Ex. i Polygonet Fig. 2. i, iii, vi være ubekiendte og iii søges, da er i Følge §. 22. No. *II.* og No. *III.*: $\mathrm{ii} + \mathrm{iv}.\mathrm{iii}' + \mathrm{vi}.\mathrm{iii}'.\mathrm{v}' + \mathrm{viii}.\mathrm{iii}'.\mathrm{v}'.\mathrm{vii}' = 0 = \mathrm{ii}.\mathrm{iii}'.\mathrm{v}'.\mathrm{vii}' + \mathrm{iv}.\mathrm{v}'.\mathrm{vii}' + \mathrm{vi}.\mathrm{vii}' + \mathrm{viii}$. Af den første Æqvation findes $-\mathrm{ii}.\mathrm{iii}^{-\prime}.\mathrm{v}^{-\prime} - \mathrm{iv}.\mathrm{v}^{-\prime} - \mathrm{viii}.\mathrm{vii}' = \mathrm{vi}$, og naar denne Værdie af vi indføres i den anden Æqvation, efterat sammes Led ere dividerte med vii', udkommer $\mathrm{ii}.\mathrm{iii}'.\mathrm{v}' - \mathrm{ii}.\mathrm{iii}^{-\prime}.\mathrm{v}^{-\prime} + \mathrm{iv}.\mathrm{v}' - \mathrm{iv}.\mathrm{v}^{-\prime} + \mathrm{viii}.\mathrm{vii}^{-\prime} - \mathrm{viii}.\mathrm{vii}' = 0$. Altsaa, i Følge §. 22. No. *IV.*, $\mathrm{ii}.\varepsilon.2\,\mathrm{sin.}(\mathrm{iii}+\mathrm{v}) + \mathrm{iv}.\varepsilon.2\,\mathrm{sin.}\,\mathrm{v} - \mathrm{viii}.\varepsilon.2\,\mathrm{sin.}\,\mathrm{vii} = 0$, eller $\mathrm{sin.}(\mathrm{iii}+\mathrm{v}) = \frac{\mathrm{viii}.\mathrm{sin.}\,\mathrm{vii} - \mathrm{iv}.\mathrm{sin.}\,\mathrm{v}}{\mathrm{ii}}$.

III.

Hvordan Directionen af en Kugles Radii kan betegnes.

§. 24.

Jeg antager, at en Kugles to horizontale Radii giøre rette Vinkler med hinanden, og ere begge perpendiculare paa en tredie Kuglens Radius. Den ene horizontale sætter jeg at strække sig fra Centrum til venstre Haand, og at være $= r$; den anden horizontale at gaae fra Centrum fremad, og at være $= \varepsilon.r$; men den verticale fra Centrum opad at være $= \eta.r$, og de modsatte at være $-r$, $-\varepsilon r$, $-\eta r$. Ved Bogstaven r betegnes Længden af Radius; Uniteterne ε og η ere begge perpendiculare paa $+1$, og i Sammenligning med denne maa η^2 saavelsom ε^2 være $= -1$, i Følge §. 5.

§. 25.

Drages der et Plan igiennem de fire Radii r, $-r$, ηr, $-\eta r$, og et andet igiennem r, $-r$, εr, $-\varepsilon r$, da giøre disse Planer en ret Vinkel med hinanden, og overskiære Kuglen i to Storcirkler, af hvilke jeg kalder den igiennem r og ηr Verticalcirkelen, og den igiennem de horizontale Radii r og εr Horizonten.

Buerne i Verticalen og dens Paralleler tælles fra det Punct paa venstre Haand, hvor de overskiæres af Horizonten, opad positive, og nedad negative. De horizontale Buer tælles fra Verticalen med Solen positive, og mod Solen negative. Naar f. Ex. $ow\gamma hpi$ (Fig. 3) betegner Horizonten, $kfs\beta$ dens Parallel, $ok\pi qn\upsilon$ Verticalen, π og n Horizontens Poler, p og γ Verticalens: saa

saa antages co $= r$, ct $= -r$, c$\gamma = \varepsilon r$, cp $= -\varepsilon r$, c$\pi = \eta r$, cn $= -\eta r$, o$\gamma = +90^\circ$, op $= -90^\circ$, o$\pi = +90^\circ$, on $= -90^\circ$; og Buerne i Parallelen tælles den Vei fra k til venstre positive, og fra k til høire negative.

§. 26.

Trækkes der fra Kuglens Centrum c (Fig. 3) til et Punct d i Horizontens og Verticalens fælles Radius en Linie cd, og fra dennes yderste Punct d drages en anden de, som er parallel med Horizontens Axel πn, og atter fra Enden af denne trækkes en tredie Linie ef parallel med Verticalens Axel pγ: da ere disse tre Linier Coordinater til det Punct f, hvor den sidste Linie ef endtes. Den første cd er Punctet f's Abscisse, og betegnes ved x; den er enten af samme Retning som Radius $+r$, eller den er negativ som Radius $-r$. Den anden og tredie Linie de og ef ere Punctet f's Ordinater; ved den anden de forestilles Punctet f's Afstand fra Horizontens Plan; den betegnes ved ηy, fordi den er parallel med ηr eller med $-\eta r$. Den tredie ef er Punctet f's Afstand fra Verticalens Plan, og betegnes ved εz, fordi den er parallel med Radius εr eller $-\varepsilon r$. Den tredie ef ($= \varepsilon z$) giør en ret Vinkel med den anden de ($= \eta y$), og denne ηy giør en ret Vinkel med den første cd ($= x$).

§. 27.

En Radius, hvis yderste Punct har de Coordinater x, ηy og εz, betegner jeg ved Summen $x + \eta y + \varepsilon z$ (§. 2). $x + \eta y$ multipliceres med $a + \eta b$, og $x + \varepsilon z$ med $a + \varepsilon b$ paa samme Maade som $c + d\sqrt{-1}$ med $a + b\sqrt{-1}$; thi da Directionsvinklerne af η og af ε tælles begge fra samme Radius $+1$ (§. 25), saa maa i Følge §. 5 saavel η^2, som ε^2 være $= -1$, og altsaa findes Producterne $(x + \eta y) . (a + \eta b)$ og $(x + \varepsilon z) . (a + \varepsilon b)$ efter den Regel §. 10.

§. 28.

Dersom et Punct rykker frem eller tilbage i en horizontal Cirkels Omkreds βkfs (Fig. 3) et vist Antal Grader fs ($=$ m), og dets Coordinater vare cd ($= x'$), de $(=\eta y')$, og ef $(=\varepsilon z')$: da bliver Ordinaten $\eta y'$ uforandret, fordi Punctet beholder samme Afstand fra Horizonten; men Abscissen cd $(=$ ue$)$ eller x' forandres til ul $(=x'')$, og Ordinaten ef $(=\varepsilon z')$ forandres til ls $(=\varepsilon z'')$, og Summen af de to nye Coordinater ul $+$ ls $(=x''+\varepsilon z'')$ bliver $(x'+\varepsilon z') \cdot (\text{cos. III} + \varepsilon \text{ sin. III})$; thi lad Radius uk kaldes ϱ, Maalet til Vinkelen kuf kaldes I, al saa Maalet til Vinkelen kus $=$ I $+$ III: saa er i Følge §. 9 ue $+$ ef $(=x'+\varepsilon z') = \varrho \cdot (\text{cos. I} + \varepsilon \text{ sin. I})$; ligeledes er ul $+$ ls $(=x''+\varepsilon z'') = \varrho \cdot [\text{cos.}(\text{I}+\text{III}) + \varepsilon \text{ sin.}(\text{I}+\text{III})] = \varrho(\text{cos. I} + \varepsilon \text{ sin. I}) \cdot (\text{cos. III} + \varepsilon \text{ sin. III})$, §. 8; og altsaa, naar isteden for $\varrho(\text{cos. I} + \varepsilon \text{ sin. I})$ sættes $x'+\varepsilon z'$, faaes $x''+\varepsilon z'' = (x'+\varepsilon z') \cdot (\text{cos. III} + \varepsilon \text{ sin. III})$.

§. 29.

Naar et Punct beskriver i Verticalen eller dens Parallel en Bue af et vist Antal Grader II, saa forandres Summen af dets forrige Coordinater x' og $\eta y'$ til $(x'+\eta y') \cdot (\text{cos. II} + \eta \text{ sin. II})$; men den tredie Coordinat $\varepsilon z'$ bliver uforandret, fordi Afstanden fra Verticalen kan ei forandres, saalænge Punctet bliver i Verticalens Parallel. Forresten er Beviset i Følge §. 27 netop som det foregaaende.

§. 30.

Har Kuglens Radius de Coordinater x, ηy og εz, da betegnes denne Radius i Følge §. 27 ved $x+\eta y+\varepsilon z$. Men forandres dens Direction saaledes, at dens yderste Punct forflyttes de horizontale Grader I: bliver den $= \eta y + (x+\varepsilon z) \cdot (\text{cos. I} + \varepsilon \text{ sin. I}) = \eta y + x \text{ cos. I} - z \text{ sin. I} + \varepsilon x \text{ sin. I} + \varepsilon z \text{ cos. I}$ (§. 28), og betegnes ved $(x+\eta y+\varepsilon z)$ „ $(\text{cos. I} + \varepsilon \text{ sin. I})$.

§. 31.

Forandres derimod Directionen af Radius $x+\eta y+\varepsilon z$ ved at forflytte dens sidste Punct de verticale Grader II: bliver den $= \varepsilon z + (x+\eta y) \cdot (\text{cos. II} + \eta \text{ sin. II}) = \varepsilon z + x \text{ cos. II} - y \text{ sin. II} + \eta x \text{ sin. II} + \eta y \text{ cos. II}$ (§. 29), og betegnes ved $(x+\eta y+\varepsilon z)$ „ $(\text{cos. II} + \eta \text{ sin. II})$.

§. 32.

§. 32.

Hvoraf følger, at $(x+\eta y+\varepsilon z)\,,,\,(\cos.\,\text{i}+\varepsilon\sin.\,\text{i})\,,,\,(\cos.\,\text{iii}+\varepsilon\sin.\,\text{iii})$ er det samme som $(x+\eta y+\varepsilon z)\,,,\,(\cos.(\text{i}+\text{iii})+\varepsilon\sin.(\text{i}+\text{iii}))$; thi enten det sidste Punct af Radius $x+\eta y+\varepsilon z$ gaaer først frem de horizontale Grader i, og derefter de horizontale Grader iii, eller det gaaer paa eengang frem den hele Bue $\text{i}+\text{iii}$: saa bliver Radius fra Centrum c til sidste Punct i Buen iii den samme. Ligeledes følger, at $(x+\eta y+\varepsilon z)\,,,\,(\cos.\,\text{ii}+\eta\sin.\,\text{ii})\,,,\,(\cos.\,\text{iv}+\eta\sin.\,\text{iv})$ $=(x+\eta y+\varepsilon z)\,,,\,(\cos.(\text{ii}+\text{iv})+\eta\sin.(\text{ii}+\text{iv}))$, og altsaa $x+\eta y+\varepsilon z=$ $(x+\eta y+\varepsilon z)\,,,\,(\cos.\,\text{i}+\varepsilon\sin.\,\text{i})\,,,\,(\cos.\,\text{i}-\varepsilon\sin.\,\text{i})=(x+\eta y+\varepsilon z)\,,,\,(\cos.\,\text{ii}+$ $\eta\sin.\,\text{ii})\,,,\,(\cos.\,\text{ii}-\eta\sin.\,\text{ii})$.

§. 33.

Gaaer et Punct frem deels i Horizontens, deels i Verticalens Paralleler, beskrivende vexelviis en horizontal og en vertical Bue; men de beskrevne Buers Grader, i den Orden som de følge hinanden, betegnes ved i, ii, iii, iv, v, vi; og Radius fra Centrum af Kuglen (Fig. 4) til første Punct i første Bue betegnes ved s; Radius fra Centrum til sidste Punct i sidste Bue ved S; og $\cos.\,\text{i}+$ $\varepsilon\sin.\,\text{i}$ betegnes ved i', $\cos.\,\text{ii}+\eta\sin.\,\text{ii}$ ved ii', $\cos.\,\text{iii}+\varepsilon\sin.\,\text{iii}$ ved iii' o. s. f.: samt $\cos.\,\text{i}-\varepsilon\sin.\,\text{i}$ ved $\text{i}^{\bar{\prime}}$, $\cos.\,\text{ii}-\eta\sin.\,\text{ii}$ ved $\text{ii}^{\bar{\prime}}$ o. s. f.: saa er, i Følge §. 30 og 31, $S=s\,,,\,\text{i}'\,,,\,\text{ii}'\,,,\,\text{iii}'\,,,\,\text{iv}'\,,,\,\text{v}'\,,,\,\text{vi}'$, i hvilken Æqvations sidste Led Uniteterne iv', v', vi', eller saa mange som man vil af de sidste, der umiddelbar følge hinanden, kan borttages, naar deres reciproqve Størrelser sammenføiede ved Tegnet (") i inverteret Orden tilføies første Led; det er, man kan i Følge §. 32 sætte $S\,,,\,\text{vi}^{\bar{\prime}}\,,,\,\text{v}^{\bar{\prime}}\,,,\,\text{iv}^{\bar{\prime}}=s\,,,\,\text{i}'\,,,\,\text{ii}'\,,,\,\text{iii}'$, eller $s\,,,\,\text{i}'\,,,\,\text{ii}'=S\,,,\,\text{vi}^{\bar{\prime}}\,,,\,\text{v}^{\bar{\prime}}\,,,$ $\text{iv}^{\bar{\prime}}\,,,\,\text{iii}^{\bar{\prime}}$ o. s. f.

§. 34.

Antages $s=S$, og sættes $s=\eta r$, bliver derfor

$$s\,,,\,\text{i}'=\eta r.$$

I.) $$s\,{,,}\,\mathrm{I}'\,{,,}\,\mathrm{II}' = r.(\eta\cos.\mathrm{II} - \sin.\mathrm{II}) = S\,{,,}\,\mathrm{VI}^{-\prime}\,{,,}\,\mathrm{V}^{-\prime}\,{,,}\,\mathrm{IV}^{-\prime}\,{,,}\,\mathrm{III}^{-\prime} =$$
$$r.\left[\begin{array}{lll} \mathrm{cIII}.\mathrm{cIV}.\mathrm{cV}.\mathrm{sVI} & + \eta.\mathrm{cIV}.\mathrm{cVI} & - \varepsilon.\mathrm{sIII}.\mathrm{cIV}.\mathrm{cV}.\mathrm{sVI} \\ + \mathrm{cIII}.\mathrm{sIV}.\mathrm{cVI} & - \eta.\mathrm{sIV}.\mathrm{cV}.\mathrm{sVI} & - \varepsilon.\mathrm{sIII}.\mathrm{sIV}.\mathrm{cVI} \\ - \mathrm{sIII}.\mathrm{sV}.\mathrm{sVI} & & - \varepsilon.\mathrm{cIII}.\mathrm{sV}.\mathrm{sVI} \end{array}\right].$$

II.) $$s\,{,,}\,\mathrm{I}'\,{,,}\,\mathrm{II}'\,{,,}\,\mathrm{III}' = r.(\eta.\mathrm{cII} - \mathrm{sII}.\mathrm{cIII} - \varepsilon.\mathrm{sII}.\mathrm{sIII}) = S\,{,,}\,\mathrm{VI}^{-\prime}\,{,,}\,\mathrm{V}^{-\prime}\,{,,}\,\mathrm{IV}^{-\prime} =$$
$$r.\left[\begin{array}{lll} \mathrm{cIV}.\mathrm{cV}.\mathrm{sVI} & - \varepsilon.\mathrm{sV}.\mathrm{sVI} & + \eta.\mathrm{cIV}.\mathrm{cVI} \\ + \mathrm{sIV}.\mathrm{cVI} & & - \eta.\mathrm{sIV}.\mathrm{cV}.\mathrm{sVI} \end{array}\right].$$

III.) $$s\,{,,}\,\mathrm{I}'\,{,,}\,\mathrm{II}'\,{,,}\,\mathrm{III}'\,{,,}\,\mathrm{IV}' = r.\left[\begin{array}{lll} \eta.\mathrm{cII}.\mathrm{cIV} & - \mathrm{cII}.\mathrm{sIV} & - \varepsilon.\mathrm{sII}.\mathrm{sIII} \\ - \eta.\mathrm{sII}.\mathrm{cIII}.\mathrm{sIV} & - \mathrm{sII}.\mathrm{cIII}.\mathrm{cIV} & \end{array}\right] =$$
$$S\,{,,}\,\mathrm{VI}^{-\prime}\,{,,}\,\mathrm{V}^{-\prime} = r.(\mathrm{cV}.\mathrm{sVI} - \varepsilon.\mathrm{sV}.\mathrm{sVI} + \eta.\mathrm{cVI}).$$

IV.) $$s\,{,,}\,\mathrm{I}'\,{,,}\,\mathrm{II}'\,{,,}\,\mathrm{III}'\,{,,}\,\mathrm{IV}'\,{,,}\,\mathrm{V}' = r.\left[\begin{array}{lll} \eta.\mathrm{cII}.\mathrm{cIV} & - \mathrm{cII}.\mathrm{sIV}.\mathrm{cV} & - \varepsilon.\mathrm{cII}.\mathrm{sIV}.\mathrm{sV} \\ - \eta.\mathrm{sII}.\mathrm{cIII}.\mathrm{sIV} & - \mathrm{sII}.\mathrm{cIII}.\mathrm{cIV}.\mathrm{cV} & - \varepsilon.\mathrm{sII}.\mathrm{cIII}.\mathrm{cIV}.\mathrm{sV} \\ & + \mathrm{sII}.\mathrm{sIII}.\mathrm{sV} & - \varepsilon.\mathrm{sII}.\mathrm{sIII}.\mathrm{cV} \end{array}\right]$$
$$= S\,{,,}\,\mathrm{VI}^{-\prime} = r.(\eta.\mathrm{cVI} + \mathrm{sVI}).$$

§. 35.

Sættes $s = S = \varepsilon r$, faaes følgende Æqvationer:

I.) $$s\,{,,}\,\mathrm{I}' = r.(\varepsilon.\mathrm{cI} - \mathrm{sI}) = S\,{,,}\,\mathrm{VI}^{-\prime}\,{,,}\,\mathrm{V}^{-\prime}\,{,,}\,\mathrm{IV}^{-\prime}\,{,,}\,\mathrm{III}^{-\prime}\,{,,}\,\mathrm{II}^{-\prime} =$$
$$r.\left[\begin{array}{lll} \varepsilon.\mathrm{cIII}.\mathrm{cV} & + \mathrm{cII}.\mathrm{sIII}.\mathrm{cV} & - \eta.\mathrm{sII}.\mathrm{sIII}.\mathrm{cV} \\ - \varepsilon.\mathrm{sIII}.\mathrm{cIV}.\mathrm{sV} & + \mathrm{cII}.\mathrm{cIII}.\mathrm{cIV}.\mathrm{sV} & - \eta.\mathrm{sII}.\mathrm{cIII}.\mathrm{cIV}.\mathrm{sV} \\ & - \mathrm{sII}.\mathrm{sIV}.\mathrm{sV} & - \eta.\mathrm{cII}.\mathrm{sIV}.\mathrm{sV} \end{array}\right].$$

II.) $$s\,{,,}\,\mathrm{I}'\,{,,}\,\mathrm{II}' = r.(-\mathrm{sI}.\mathrm{cII} - \eta.\mathrm{sI}.\mathrm{sII} + \varepsilon.\mathrm{cI}) = S\,{,,}\,\mathrm{VI}^{-\prime}\,{,,}\,\mathrm{V}^{-\prime}\,{,,}\,\mathrm{IV}^{-\prime}\,{,,}\,\mathrm{III}^{-\prime} =$$
$$r.\left[\begin{array}{lll} \varepsilon.\mathrm{cIII}.\mathrm{cV} & - \eta.\mathrm{sIV}.\mathrm{sV} & + \mathrm{sIII}.\mathrm{cV} \\ - \varepsilon.\mathrm{sIII}.\mathrm{cIV}.\mathrm{sV} & & + \mathrm{cIII}.\mathrm{cIV}.\mathrm{sV} \end{array}\right].$$

III.) $$s\,{,,}\,\mathrm{I}'\,{,,}\,\mathrm{II}'\,{,,}\,\mathrm{III}' = r.\left[\begin{array}{lll} - \mathrm{sI}.\mathrm{cII}.\mathrm{cIII} & - \varepsilon.\mathrm{sI}.\mathrm{cII}.\mathrm{sIII} & - \eta.\mathrm{sI}.\mathrm{sII} \\ - \mathrm{cI}.\mathrm{sIII} & + \varepsilon.\mathrm{cI}.\mathrm{cIII} & \end{array}\right] =$$
$$S\,{,,}\,\mathrm{VI}^{-\prime}\,{,,}\,\mathrm{V}^{-\prime}\,{,,}\,\mathrm{IV}^{-\prime} = r.(\varepsilon.\mathrm{cV} + \mathrm{cIV}.\mathrm{sV} - \eta.\mathrm{sIV}.\mathrm{sV}).$$

IV.) $$s\,{,,}\,\mathrm{I}'\,{,,}\,\mathrm{II}'\,{,,}\,\mathrm{III}'\,{,,}\,\mathrm{IV}' = r.\left[\begin{array}{lll} \varepsilon.\mathrm{cI}.\mathrm{cIII} & - \mathrm{sI}.\mathrm{cII}.\mathrm{cIII}.\mathrm{cIV} & - \eta.\mathrm{sI}.\mathrm{sII}.\mathrm{cIV} \\ - \varepsilon.\mathrm{sI}.\mathrm{cII}.\mathrm{sIII} & - \mathrm{cI}.\mathrm{sIII}.\mathrm{cIV} & - \eta.\mathrm{sI}.\mathrm{cII}.\mathrm{cIII}.\mathrm{sIV} \\ & + \mathrm{sI}.\mathrm{sII}.\mathrm{sIV} & - \eta.\mathrm{cI}.\mathrm{sIII}.\mathrm{sIV} \end{array}\right]$$
$$= S\,{,,}\,\mathrm{VI}^{-\prime}\,{,,}\,\mathrm{V}^{-\prime} = r.(\varepsilon.\mathrm{cV} + \mathrm{sV}).$$

IV.

Om sphæriske Polygoners Opløsning.

§. 36.

Et sphærisk Polygon er den Figur, som paa en Kugles Overflade (eller Yde) fremkommer ved at sammenføie flere end to Storbuer saaledes, at den følgende begynder der, hvor den foregaaende slipper, og den sidste ophører hvor den første begynder. Polygonets Sider ere de Storbuer, hvoraf det er sammensat; Vinklernes Maal ere de Grader, som hver Sides Plan afviger fra Planet af foregaaende Sides Forlængning. Naar Radius er $= 1$, betegnes Polygonets Sider og Vinkler (Fig. 5) i den Orden, som de følge hinanden, ved I, II, III, IV, V, VI ꝛc.; de uefne Tal bemærke Vinklerne, og de efne Siderne; II er f. Ex. den Side mellem I og III, III den Vinkel, som Siden IV afviger fra Forlængningen af II.

§. 37.

Dersom et Polygons Vinkler og Sider ere bekiendte, saa nær som een Vinkel og to Sider, eller saa nær som to Vinkler og een Side, eller tre Sider, eller tre Vinkler: da bestemmes det ubekiendte ved følgende Æqvation,

$$s \,,, \mathrm{I}' \,,, \mathrm{II}' \,,, \mathrm{III}' \,,, \mathrm{IV}' \,,, \mathrm{V}' \,,, \mathrm{VI}' \,,, \ldots \,,, \mathrm{N}' = s,$$

i hvilken s er ubestemt, og kan antages enten for Horizontens og Verticalcirkelens fælles Radius r, eller s kan sættes $= \varepsilon r$, som er Kuglens horizontale Radius, der er perpendicular paa r, eller s kan sættes $= \eta r$, som er den verticale Radius, der er perpendicular paa r og paa εr. ε^2 ligesaavel som η^2 er $= -1$, i Følge §. 27. $\mathrm{I}' = \cos.\mathrm{I} + \varepsilon \sin.\mathrm{I}$, $\mathrm{II}' = \cos.\mathrm{II} + \eta \sin.\mathrm{II}$, $\mathrm{III}' = \cos.\mathrm{III} + \varepsilon \sin.\mathrm{III}$, ..., $\mathrm{N}' = \cos.\mathrm{N} + \eta \sin.\mathrm{N}$, $\mathrm{I}^{-\prime} = \frac{1}{\cos.\mathrm{I} + \varepsilon \sin.\mathrm{I}}$, $\mathrm{II}^{-\prime} = \frac{1}{\cos.\mathrm{II} + \eta \sin.\mathrm{II}}$ o. s. v. Tegnet (″), hvorved s, I', II' ꝛc. ere forbundne, bemærker at s først skal multipliceres med I', dernæst $s \,,, \mathrm{I}'$ med II', saa $s \,,, \mathrm{I}' \,,, \mathrm{II}'$ med III', o. s. v.; men dog med den Indskrænkning, at den af de adderte Linier i Multiplicandum bliver uforandret, som ligger udenfor Planet af Cirkelbuen i Multiplicators

tiplicators Mærke, saa at $\eta\,„\,(\mathrm{cos.\,I} + \varepsilon\,\mathrm{sin.\,I}) = \eta$, $\varepsilon\,„\,(\mathrm{cos.\,II} + \eta\,\mathrm{sin.\,II}) = \varepsilon$, $(x + \eta y + \varepsilon z)\,„\,(\mathrm{cos.\,III} + \varepsilon\,\mathrm{sin.\,III}) = \eta y + (x + \varepsilon z)\,.\,(\mathrm{cos.\,III} + \varepsilon\,\mathrm{sin.\,III})$, ligesom allerede tilforn er sagt §. 28-32.

Hvordan omtalte Æqvation ($s\,„\,\mathrm{I}'\,„\,\mathrm{II}'\,„\,\mathrm{III}'\,„\,\mathrm{IV}'\,„\,\ldots\,„\,\mathrm{N}' = s$) kan tiene til et sphærisk Polygons Opløsning, indsees af følgende:

Lad Kuglen qhυw (Fig. 6) kunne væltes om Axelen πcn af den horizontale Storcirkel hpow, og om Axelen pcγ af den verticale Storcirkel qπoυ, uden at disse to Cirklers Position derved forandres, og lad samme Kugle

1) Stilles saaledes, at i Polygonet I II III IV V VI den sidste Sides sidste Punct falder i Horizontens Pol π, og samme Sides Forlængning falder i Verticalens Qvadrant πo Fig. 6.

2) Lad derpaa Kuglen væltes om Horizontens Axel πcn de horizontale Grader I, saa falder Siden II i Verticalen mellem π og o, ligesom Fig. 7 forestiller.

3) Naar nu Kuglen væltes om Verticalens Axel pcγ de verticale Grader II, da gaaer hele Siden II igiennem Horizontens Pol π, og Kuglen faaer Positionen Fig. 8.

4) Væltes den nu atter om Horizontens Axel de horizontale Grader III, kommer derved Siden IV til at ligge i Verticalbuen mellem o og π (Fig. 9).

5) Og bliver man saaledes ved at omvælte Kuglen de verticale Grader IV, de horizontale V, de verticale VI ꝛc.: faaer den tilsidst samme Position som den allerførst havde No. 1. Fig. 6.

I det at Kuglen omvæltes vexelviis paa Horizontens og Verticalcirkelens Axel, beskriver ethvert Kuglens Punct først en horizontal Bue, som er Maalet til Polygonets første Vinkel; dernæst en vertical Bue af saa mange Grader som Pylygonets første Side; saa atter en horizontal, der maaler den anden Vinkel, o. s. f. lige til at Kuglen igien er kommen i første Position, og hvert dens Punct, efterat have beskrevet ligesaa mange horizontale Buer, som Polygonet har Vinkler, og ligesaa mange verti-

verticale, som det har Sider, er kommet tilbage til samme Sted, hvorfra det udgik.

6) Følgelig naar et Polygons Vinkler og Sider tilsammen ere af Antallet N, og i Kuglens første Position (Fig. 6) et af dens Puncter, hvilket som helst, havde til Coordinater de tre Linier, som udgiøre Summen $x + \eta y + \varepsilon z$ $(= s)$: saa er i Følge §. 33 $s = s$ „ I′ „ II′ „ III′ „ IV′ „ . . . „ N′. Endnu maatte agtes

a) At paa Overfladen af Kuglen er, medens den omvæltedes, af det faste Punct p afridset et Polygon, hvori første Side er = Vinkelen I, følgende Vinkel = Siden II, følgende Side = Vinkelen III, o. s. v.; thi naar Kuglen væltes om Horizontens Axel, og dens yderste Dele stryge det faste Punct p forbi, tegner samme Punct paa Kuglens Overflade Polygonets Sider, og, naar den væltes om Verticalens Axel, faaer hver foregaaende Side sin Inclination til den følgendes Forlængning, hvilket just ikke er vanskeligt at forestille sig, skiøndt Polygonet har maattet udelades af Figurerne 6, 7 rc., for at ei den ene Linie skulde falde i den anden, og alt blive utydeligt.

b) Af det faste Punct o er aftegnet et andet Polygon, hvis Vinkler ere deels $-90°$, deels $+90°$; Siderne ere I, II, III, IV, . . . , N, og Polygonets Æqvation er s „ I′ „ $(-\varepsilon)$ „ II′ „ ε „ III′ „ $(-\varepsilon)$ „ IV′ „ ε „ . . . . „ $(-\varepsilon)$ „ N′ „ $\varepsilon = s$. Dog herom maa være nok sagt, da denne Æqvation ei i det følgende er brugt. Jeg maa nu vende tilbage igien til den Formel, som jeg eengang har lagt til Grund for alle de øvrige, nemlig:

7) s „ I′ „ II′ „ III′ „ IV′ „ . . . „ N′ $= s$. Denne Formel kan forandres paa mange Maader; thi da s er Summen af Coordinaterne til et ubestemt Punct, saa kan isteden for s sættes hvad for en Linie det skal være, følgelig ogsaa ε, η, ηr eller εr.

8) I Formlens første Led kan af de Uniteter, som følge efter s, hvilken man vil antages for den første, naar den følgende tages for den anden, næstfølgende for den tredie, o. s. f., foregaaende for den sidste, næstforegaaende

 for

for næstsidste, o. s. v. Antages f. Ex. første Led at begynde med $s ,, \mathrm{III}$, da bliver Fig. 8 Kuglens første Position, Fig. 9 den anden, Fig. 7 den næstsidste, og Fig. 8 den sidste, saa at i Følge §. 33, og paa samme Maade, som før er viist, Æqvationen maa blive $s ,, \mathrm{III}' ,, \mathrm{IV}' ,, \mathrm{V}' ,, \ldots ,, \mathrm{N}' ,, \mathrm{I}' ,, \mathrm{II}' = s$.

9) De to nys omtalte Forandringer af Æqvationen $s ,, \mathrm{I}' ,, \mathrm{II}' ,, \mathrm{III}' ,, \ldots ,, \mathrm{N}' = s$ have den Nytte, at hvilken man vil af Uniteterne I', II', III', ..., N' kan elimineres; skal f. Ex. III' skaffes bort, da forandrer jeg Æqvationen til $s ,, \mathrm{III}' ,, \mathrm{IV}' ,, \mathrm{V}' ,, \ldots ,, \mathrm{N}' ,, \mathrm{I}' ,, \mathrm{II}' = s$, derefter sætter jeg $s = \eta r$, hvorved $s ,, \mathrm{III}'$ bliver $= \eta r$ efter §. 28. Skal IV' udelades, forandres Æqvationen til $s ,, \mathrm{IV}' ,, \mathrm{V}' ,, \ldots ,, \mathrm{N}' ,, \mathrm{I}' ,, \mathrm{II}' ,, \mathrm{III}' = s$, og s sættes $= \varepsilon r$, hvorved $s ,, \mathrm{IV}'$ bliver efter §. 29 saa stor som εr.

10) Da $s ,, \mathrm{I}' ,, \mathrm{II}' ,, \ldots ,, \mathrm{N}' = s$, saa er i Følge §. 33 $s ,, \mathrm{N}^{\bar{\prime}} ,, \ldots ,, \mathrm{VI}^{\bar{\prime}} ,, \mathrm{V}^{\bar{\prime}} = s ,, \mathrm{I}' ,, \mathrm{II}' ,, \mathrm{III}' ,, \mathrm{IV}'$, eller man kan i Almindelighed borttage af Æqvationens første Led saa mange som man vil af de sidste Uniteter, naar alene de borttagnes reciproqve Størrelser i omvendt Orden sammenføies indbyrdes ved Tegnet ("), og derefter ved samme Tegn " forbindes med det andet Led s.

11) Herved kan i et af Æqvationens Led hvilken Unitet, som forlanges, blive den sidste, og følgelig en Ligning udbringes, hvori denne Unitet ei findes. Naar f. Ex. i Æqvationen $s ,, \mathrm{I}' ,, \mathrm{II}' ,, \mathrm{III}' ,, \mathrm{IV}' = s ,, \mathrm{N}^{\bar{\prime}} ,, \ldots ,, \mathrm{VI}^{\bar{\prime}} ,, \mathrm{V}^{\bar{\prime}}$ hele det første Led er $= x + \eta y + \varepsilon z$, men det andet Led er $= \mathfrak{x} + \eta\mathfrak{y} + \varepsilon\mathfrak{z}$: da er i Følge §. 3 $\varepsilon z = \varepsilon\mathfrak{z}$, i hvilken Ligning ei findes IV'; thi $\mathrm{IV}' = \cos.\mathrm{IV} + \eta \sin.\mathrm{IV}$, altsaa, da der multipliceres i første Led med IV', blev εz uforandret, §. 29.

12) Den Æqvation, som man finder for den søgte ubekiendte u, efterat have paa anførte Maade eliminerет de to andre ubekiendte, som ikke søges, har den Form: $a = b \cos. u + c \sin. u$; thi man seer let, at den aldrig kan indeholde $\cos. u \,.\, \sin. u$, eller Potenzer af $\cos. u$ og $\sin. u$. For at opløse denne Æqvation, kan sættes, ligesom tilforn er viist (§. 20), $\frac{b}{c} = \cot.\psi$, og $\cos.(u - \psi) = \frac{a \sin.\psi}{c} = \frac{a \cos.\psi}{b}$.

13)

13) Er Kuglens Radius r uendelig stor, og det sphæriske Polygons Sider uendelig smaae Dele af Peripherien, da forvandles det sphæriske til et plant Polygon, hvis Sider ere Sinus af Siderne i det sphæriske multiplicerte med Kuglens Radius. Oplesningen passer altsaa baade til sphæriske og plane Polygoner.

V.

Nu vil jeg forsøge at udlede af samme Æqvation (§. 37. No. 6) de sphæriske Trianglers fornemste Egenskaber.

§. 38.

Da Triangelens Æqvation er s „ I' „ II' „ . . . „ $\mathrm{VI}' = s$ (§. 37. No. 6), og Progressionens Begyndelse er ubestemt (§. 37. No. 8): saa kan den begynde med I' eller III' eller V', hvis der nemlig antages at første Unitet skal ligge i Horizontens Plan, eller at den skal være cos. + ε sin. Jeg betegner derfor de Linier i Progressionen, som følge efter VI', ved VII', VIII', IX', X', XI' &c., saa at I', VII', XIII' blive Synonyma, ligesaavel som II', VIII', XIV' o. s. v. Denne Maade at tælle paa kan ikke forvilde; thi hvilken i Ordenen Linien er, naar ei tælles længere end til VI, findes ved at subtrahere VI saa ofte som mueligt fra de dette Tal overstigende Nummere. Dernæst sætter jeg den Vinkels cos. + ε sin., hvoraf Progressionen begynder, at være $(n+\mathrm{I})'$, og lader n være ubestemt, uden for saavidt at den enten betegner o, eller et effent Tal. Triangelens almindeligere Æqvation bliver derfor i Følge denne Benævning og §. 37. No. 8:

$$s \;„\; (n+\mathrm{I})' \;„\; (n+\mathrm{II})' \;„\; (n+\mathrm{III})' \;„\; (n+\mathrm{IV})' \;„\; (n+\mathrm{V})' \;„\; (n+\mathrm{VI})' = s.$$

Forandres denne Æqvation i Overeensstemmelse med §. 33 til

$$\varepsilon \;„\; (n+\mathrm{I})' \;„\; (n+\mathrm{II})' = \varepsilon \;„\; (n+\mathrm{VI})^{\prime\prime} \;„\; (n+\mathrm{V})^{\prime\prime} \;„\; (n+\mathrm{IV})^{\prime\prime} \;„\; (n+\mathrm{III})^{\prime\prime}:$$

findes, i Følge §. 35. No. *II.*, og §. 3,

$$I.)\quad \cos(n+\mathrm{I}) = \cos.(n+\mathrm{III}) \,.\, \cos.(n+\mathrm{V}) - \sin.(n+\mathrm{III}) \,.\, \cos.(n+\mathrm{IV}) \,.\, \sin.(n+\mathrm{V}).$$

$$II.)\quad \sin.(n+\mathrm{I}) = \frac{\sin.(n+\mathrm{IV}) \,.\, \sin.(n+\mathrm{V})}{\sin.(n+\mathrm{II})}.$$

Forandres den til $\varepsilon\,,,\,(n+\text{I})'\,,,\,(n+\text{II})'\,,,\,(n+\text{III})'\,,,\,(n+\text{IV})' = \varepsilon\,,,\,(n+\text{VI})^{-\prime}\,,,\,(n+\text{V})^{-\prime}$, udkommer en Æqvation liig den §. 35. No. *IV.*, alene at n er tilføiet Tallene I, II, III ꝛc., og r antaget = 1. Altsaa, naar denne Æqvations Led, der indeholde η, divideres med sin. (n + I), bliver:

$$III.)\ -\cot.(n+\text{I}) = \frac{\cot.(n+\text{IV})\,.\,\sin.(n+\text{II})}{\sin.(n+\text{III})} + \cot.(n+\text{III})\,.\,\cos.(n+\text{II}).$$

Forandres den til $\eta\,,,\,(n+\text{I})'\,,,\,(n+\text{II})'\,,,\,(n+\text{III})' = \eta\,,,\,(n+\text{VI})^{-\prime}\,,,\,(n+\text{V})^{-\prime}\,,,\,(n+\text{IV})^{-\prime}$, giver den i Følge §. 34. No. *II.*

$$IV.)\ \cos(n+\text{II}) = \cos(n+\text{IV})\,.\,\cos(n+\text{VI}) - \sin(n+\text{IV})\,.\,\cos(n+\text{V})\,.\,\sin(n+\text{VI})$$

$$V.)\ \sin.(n+\text{II}) = \frac{\sin.(n+\text{V})\,.\,\sin.(n+\text{VI})}{\sin.(n+\text{III})}.$$

Og endelig, naar den forandres til $\eta\,,,\,(n+\text{I})'\,,,\,(n+\text{II})'\,,,\,(n+\text{III})'\,,,\,(n+\text{IV})'\,,,\,(n+\text{V})' = \eta\,,,\,(n+\text{VI})^{-\prime}$, faaes af det Led, som indeholder ε, §. 34. No. *IV.*,

$$VI.)\ -\cot.(n+\text{II}) = \frac{\cot.(n+\text{V})\,.\,\sin.(n+\text{III})}{\sin.(n+\text{IV})} + \cot.(n+\text{IV})\,.\,\cos.(n+\text{III}).$$

§. 39.

I de foregaaende sex Æqvationer forudsættes, n at betegne Nul, eller ethvert positiv effent Tal; men ved at sammenligne de tre første med de tre sidste, vil man finde, at i de første tre kan ogsaa isteden for n sættes n + 1, eller ethvert ueffent positiv Tal; altsaa kan i de tre første Æqvationer n bemærke Nul, eller ethvert positiv heelt Tal. Der kan ogsaa isteden for n sættes n + et positiv heelt Tal, hvilket som helst; man kan f. Ex. sætte isteden for n: 0 + 3, 1 + 3, 2 + 3, 3 + 3, 4 + 3 og saa videre, altsaa n + 3. Hvoraf følger: at, naar i Æqvationen *III.* §. 38 isteden for n sættes n + III, forvandles den til

$$-\cot.(n+\text{IV}) = \frac{\cot.(n+\text{VII})\,.\,\sin.(n+\text{V})}{\sin.(n+\text{VI})} + \cot.(n+\text{VI})\,.\,\cos.(n+\text{V}).$$

Følgelig er

$$-\cot.(n+\text{I}) = \frac{\cot.(n+\text{IV})\,.\,\sin.(n+\text{VI})}{\sin.(n+\text{V})} + \cot.(n+\text{V})\,.\,\cos.(n+\text{VI}),$$

og denne Æqvation, sammenlignet med Æqvationen *III.* §. 38, giver følgende dobbelte Udtryk af — cot. (n + I).

I.)

$$I.)\ -\cot.(n+I) = \frac{\cot.(n+IV).\sin.\begin{bmatrix}n+II\\ n+VI\end{bmatrix}}{\sin.\begin{bmatrix}n+III\\ n+V\end{bmatrix}} + \cot.\begin{bmatrix}n+III\\ n+V\end{bmatrix}.\cos.\begin{bmatrix}n+II\\ n+VI\end{bmatrix}.$$

efter hvilken Formel $-\cot.(n+I)$ faaer samme Værdie, enten man bruger kun de øverste, eller kun de nederste af de dobbelte Tal.

Ligeledes naar i Æqvationen *II.* §. 38 sættes $n+II$ isteden for n, udkommer:

$$\sin.(n+III) = \frac{\sin.(n+VI).\sin.(n+I)}{\sin.(n+IV)},\ \text{altsaa}\ \sin.(n+I) = \frac{\sin.(n+III).\sin.(n+IV)}{\sin.(n+VI)},$$

af hvilken Æqvation og den §. 38. No. *II.* følger:

$$II.)\ \sin.(n+I) = \frac{\sin.(n+IV).\sin.\begin{bmatrix}n+III\\ n+V\end{bmatrix}}{\sin.\begin{bmatrix}n+VI\\ n+II\end{bmatrix}}.$$

Sættes der i Æqvationen *I.* §. 38 Tallet $n+III$ isteden for n, faaes:

$$III.)\ \cos.(n+I) = \frac{\cos.(n+VI).\cos.(n+II) - \cos.(n+IV)}{\sin.(n+VI).\sin.(n+II)}.$$

§. 40.

Ved samme Substitution faaes af samme Æqvation

$\cos.(n+IV) = \cos.(n+VI).\cos.(n+II) - \sin.(n+VI).\cos.(n+I).\sin.(n+II)$, eller

$-\cos(n+IV) + \frac{\cos(n+VI).\cos(n+II)}{\sin.(n+IV)}.\sin(n+IV) = \sin(n+VI).\sin(n+II).\cos(n+I)$.

Altsaa, naar denne Æqvations sidste Led kaldes a, $\cos.(n+IV)$ sættes $= \cos.u$, $-I = b$, og $\frac{\cos.(n+VI).\cos.(n+II)}{\sin.(n+IV)} = c$: kan i Følge §. 20 antages

$$\tang.\psi = -\frac{\cos.(n+VI).\cos.(n+II)}{\sin.(n+IV)},\ \text{og}$$

$$\cos.(n+I) = -\frac{\cos.[(n+IV)-\psi]}{\cos.\psi.\sin.(n+VI).\sin.(n+II)}.$$

§. 41.

Æqvationen *I.* §. 38 er

$$\underbrace{\overbrace{\cos.(n+I)}^{a}}_{a} = \underbrace{\cos.\overbrace{(n+III)}^{u}}_{b}.\overbrace{\cos.\underbrace{(n+V)}_{u}}^{b} - \overbrace{\underbrace{\sin.\overbrace{(n+III)}^{u}.\cos.(n+IV)}_{c}.\sin.\underbrace{(n+V)}_{u}}^{\bar{c}},$$

og

og naar dennes Termini benævnes ved de under eller over skrevne Bogstaver a, b, c, u: da findes, i Følge §. 20, cos. (n + I) ved følgende Formler:

$$-\cos.(n+\mathrm{IV}).\,\mathrm{tang.}\begin{bmatrix}n+\mathrm{V}\\n+\mathrm{III}\end{bmatrix}=\cot.\begin{bmatrix}\phi'\\\phi\end{bmatrix},\text{ og}$$

$$\cos.(n+\mathrm{I})=\frac{\sin.\begin{bmatrix}(n+\mathrm{III})+\phi'\\(n+\mathrm{V})+\phi\end{bmatrix}.\cos.\begin{bmatrix}n+\mathrm{V}\\n+\mathrm{III}\end{bmatrix}}{\sin.\begin{bmatrix}\phi'\\\phi\end{bmatrix}}.$$

§. 42.

I Følge §. 39. No. *I.* er

$$-\cot.(n+\mathrm{I})=\frac{\cot.(n+\mathrm{IV}).\sin.\begin{bmatrix}n+\mathrm{VI}\\n+\mathrm{II}\end{bmatrix}}{\sin.\begin{bmatrix}n+\mathrm{V}\\n+\mathrm{III}\end{bmatrix}}+\cot.\begin{bmatrix}n+\mathrm{V}\\n+\mathrm{III}\end{bmatrix}.\cos.\begin{bmatrix}n+\mathrm{VI}\\n+\mathrm{II}\end{bmatrix},$$

og naar $-\cot.(n+\mathrm{I})=a$, $\dfrac{\cot.(n+\mathrm{IV})}{\sin.\begin{bmatrix}n+\mathrm{V}\\n+\mathrm{III}\end{bmatrix}}=c$, $\begin{bmatrix}n+\mathrm{VI}\\n+\mathrm{II}\end{bmatrix}=u$, $\cot.\begin{bmatrix}n+\mathrm{V}\\n+\mathrm{III}\end{bmatrix}=b$, og Æqvationen sammenlignes med den §. 20, da vil let indsees Rigtigheden af følgende Formler:

$$\mathrm{tang.}\begin{bmatrix}\phi'\\\phi\end{bmatrix}=\mathrm{tang.}(n+\mathrm{IV}).\cos.\begin{bmatrix}n+\mathrm{V}\\n+\mathrm{III}\end{bmatrix}.$$

$$-\cot.(n+\mathrm{I})=\frac{\sin.\begin{bmatrix}(n+\mathrm{VI})+\phi'\\(n+\mathrm{II})+\phi\end{bmatrix}}{\sin.\begin{bmatrix}\phi'\\\phi\end{bmatrix}}.\cot.\begin{bmatrix}n+\mathrm{V}\\n+\mathrm{III}\end{bmatrix}.$$

§. 43.

Sættes der i de to sidste Æqvationer §. 41 $n+\mathrm{II}$ istedenfor n: bliver $\cot.\phi=-\cos.(n+\mathrm{VI}).\,\mathrm{tang.}(n+\mathrm{V})$, og $\sin.((n+\mathrm{I})+\phi)=\dfrac{\cos.(n+\mathrm{III}).\sin.\phi}{\cos.(n+\mathrm{V})}$.

Men sættes $n+\mathrm{IV}$ isteden for n, bliver

$\cot.\phi'=-\cos.(n+\mathrm{II}).\,\mathrm{tang.}(n+\mathrm{III})$, og $\sin.((n+\mathrm{I})+\phi')=\dfrac{\cos.(n+\mathrm{V}).\sin.\phi'}{\cos.(n+\mathrm{III})}$.

Altsaa

Altsaa $\sin.\begin{bmatrix}(n+\mathrm{I})+\varphi' \\ (n+\mathrm{I})+\varphi\end{bmatrix} = \dfrac{\cos.\begin{bmatrix}(n+\mathrm{V}) \\ (n+\mathrm{III})\end{bmatrix}}{\cos.\begin{bmatrix}(n+\mathrm{III}) \\ (n+\mathrm{V})\end{bmatrix}} . \sin.\begin{bmatrix}\varphi' \\ \varphi\end{bmatrix}$, og

$$\cot.\begin{bmatrix}\varphi' \\ \varphi\end{bmatrix} = -\cos.\begin{bmatrix}n+\mathrm{II} \\ n+\mathrm{VI}\end{bmatrix} . \mathrm{tang}.\begin{bmatrix}n+\mathrm{III} \\ n+\mathrm{V}\end{bmatrix}.$$

§. 44.

Ved at sætte $n+\mathrm{V}$ isteden for n i de to sidste Æqvationer §. 42, faaes

$\sin.[(n+\mathrm{I})+\varphi] = -\cot.(n+\mathrm{VI}) . \mathrm{tang}.(n+\mathrm{II}) . \sin.\varphi$, og

$\mathrm{tang}.\varphi = \mathrm{tang}.(n+\mathrm{III}) . \cos.(n+\mathrm{II})$;

Men ved at sætte $n+\mathrm{I}$ isteden for n, udkommer:

$\sin.[(n+\mathrm{I})+\varphi'] = -\cot.(n+\mathrm{II}) . \mathrm{tang}.(n+\mathrm{VI}) . \sin.\varphi'$, og

$\mathrm{tang}.\varphi' = \mathrm{tang}.(n+\mathrm{V}) . \cos.(n+\mathrm{VI})$;

Hvoraf følger:

$\sin.\begin{bmatrix}(n+\mathrm{I})+\varphi' \\ (n+\mathrm{I})+\varphi\end{bmatrix} = -\cot.\begin{bmatrix}n+\mathrm{II} \\ n+\mathrm{VI}\end{bmatrix} . \mathrm{tang}.\begin{bmatrix}n+\mathrm{VI} \\ n+\mathrm{II}\end{bmatrix} . \sin.\begin{bmatrix}\varphi' \\ \varphi\end{bmatrix}$, og

$\mathrm{tang}.\begin{bmatrix}\varphi' \\ \varphi\end{bmatrix} = \mathrm{tang}.\begin{bmatrix}n+\mathrm{V} \\ n+\mathrm{III}\end{bmatrix} . \cos.\begin{bmatrix}n+\mathrm{VI} \\ n+\mathrm{II}\end{bmatrix}$.

§. 45.

$$\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I}) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{II})+(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})] . \sin\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{II})+(n+\mathrm{VI})-(n+\mathrm{IV})]}{\sin.(n+\mathrm{II}) . \sin.(n+\mathrm{VI})};$$

thi $\cos.(n+\mathrm{I}) = \dfrac{\cos.(n+\mathrm{VI}) . \cos.(n+\mathrm{II}) - \cos.(n+\mathrm{IV})}{\sin.(n+\mathrm{VI}) . \sin.(n+\mathrm{II})}$, §. 39. No. *III.*, og

$2\sin.^2\tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I}) = 1 - \cos.(n+\mathrm{I})$, §. 19. *e.*

Altsaa $2\sin.^2\tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I}) = 1 - \dfrac{\cos.(n+\mathrm{VI}) . \cos.(n+\mathrm{II}) - \cos.(n+\mathrm{IV})}{\sin.(n+\mathrm{VI}) . \sin.(n+\mathrm{II})}$, eller

$$2\sin.^2\tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I}) = \frac{\sin.(n+\mathrm{VI}) . \sin.(n+\mathrm{II}) - \cos.(n+\mathrm{VI}) . \cos.(n+\mathrm{II}) + \cos.(n+\mathrm{IV})}{\sin.(n+\mathrm{VI}) . \sin.(n+\mathrm{II})},$$

eller, i Følge §. 19. *b*, $2\sin.^2\tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I}) = \dfrac{\cos.(n+\mathrm{IV}) - \cos.[(n+\mathrm{VI})+(n+\mathrm{II})]}{\sin.(n+\mathrm{VI}) . \sin.(n+\mathrm{II})}$,

og da $\cos.b - \cos.a = 2\sin.\tfrac{1}{2}(a+b) . \sin.\tfrac{1}{2}(a-b)$, §. 19. *i*: saa bliver

$$\sin^2\tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I}) = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})+(n+\mathrm{II})] . \sin.\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{VI})+(n+\mathrm{II})-(n+\mathrm{IV})]}{\sin.(n+\mathrm{VI}) . \sin.(n+\mathrm{II})}.$$

§. 46.

$$\mathrm{Cos.}^2 \tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I}) = \frac{\mathrm{sin.}\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{II})-(n+\mathrm{VI})]\,.\,\mathrm{sin.}\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})-(n+\mathrm{II})+(n+\mathrm{VI})]}{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{II})\,.\,\mathrm{sin.}(n+\mathrm{VI})};$$

thi $1+\mathrm{cos.}(n+\mathrm{I}) = 2\mathrm{cos.}^2\tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I})$, §. 19. *d*; men efter Æqvat. *III.* §. 39 er

$$1+\mathrm{cos.}(n+\mathrm{I}) = \frac{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{II})\,.\,\mathrm{sin.}(n+\mathrm{VI}) + \mathrm{cos.}(n+\mathrm{II})\,.\,\mathrm{cos.}(n+\mathrm{VI}) - \mathrm{cos.}(n+\mathrm{IV})}{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{II})\,.\,\mathrm{sin.}(n+\mathrm{VI})},$$

altsaa $2\mathrm{cos.}^2\tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I}) = \dfrac{\mathrm{cos.}[(n+\mathrm{II})-(n+\mathrm{VI})] - \mathrm{cos.}(n+\mathrm{IV})}{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{II})\,.\,\mathrm{sin.}(n+\mathrm{VI})}$, §. 19. *b.*

Følgelig, da $\mathrm{cos.b} - \mathrm{cos.a} = 2\,\mathrm{sin.}\tfrac{1}{2}(a+b)\,.\,\mathrm{sin.}\tfrac{1}{2}(a-b)$, §. 19. *i*, saa er

$$\mathrm{cos.}^2\tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I}) = \frac{\mathrm{sin}\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{II})+(n+\mathrm{IV})-(n+\mathrm{VI})]\,.\,\mathrm{sin}\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})-(n+\mathrm{II})+(n+\mathrm{VI})]}{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{II})\,.\,\mathrm{sin.}(n+\mathrm{VI})}.$$

§. 47.

$$-\mathrm{tang.}\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{I})-(n+\mathrm{III})] = \frac{\mathrm{sin.}\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})-(n+\mathrm{VI})]}{\mathrm{sin.}\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})]}\,.\,\mathrm{tang.}\tfrac{1}{2}(n+\mathrm{V}),\ \text{og}$$

$$-\mathrm{tang.}\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{I})+(n+\mathrm{III})] = \frac{\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})-(n+\mathrm{VI})]}{\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})]}\,.\,\mathrm{tang.}\tfrac{1}{2}(n+\mathrm{V}),$$

hvilket kan bevises saaledes:

I.) Ved at addere og subtrahere $\mathrm{sin.}(n+\mathrm{I})$, forandres Æqvationen

$\mathrm{sin.}(n+\mathrm{III}) = \dfrac{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{I})\,.\,\mathrm{sin.}(n+\mathrm{VI})}{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{IV})}$, §. 39. *II.*, til de to følgende

a) $\mathrm{sin.}(n+\mathrm{I}) - \mathrm{sin.}(n+\mathrm{III}) = \dfrac{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{I})\,.\,\mathrm{sin.}(n+\mathrm{IV}) - \mathrm{sin.}(n+\mathrm{I})\,.\,\mathrm{sin.}(n+\mathrm{VI})}{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{IV})}$, og

b) $\mathrm{sin.}(n+\mathrm{I}) + \mathrm{sin.}(n+\mathrm{III}) = \dfrac{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{I})\,.\,\mathrm{sin.}(n+\mathrm{IV}) + \mathrm{sin.}(n+\mathrm{I})\,.\,\mathrm{sin.}(n+\mathrm{VI})}{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{IV})}$.

Af Æqv. *I.* §. 39 udkommer, ved at sætte $n+\mathrm{II}$ isteden for n, Æqvationen

$$-\mathrm{cot.}(n+\mathrm{III}) = \frac{\mathrm{cos.}(n+\mathrm{IV})\,.\,\mathrm{cos.}(n+\mathrm{V})}{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{V})} + \frac{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{IV})\,.\,\mathrm{cos.}(n+\mathrm{VI})}{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{V})\,.\,\mathrm{sin.}(n+\mathrm{VI})}.$$

Naar dennes Led multipliceres med Ledene i Æqvationen

$\mathrm{sin.}(n+\mathrm{III}) = \dfrac{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{I})\,.\,\mathrm{sin.}(n+\mathrm{VI})}{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{IV})}$, §. 39. *II.*, bliver

$$-\mathrm{cos}(n+\mathrm{III}) = \frac{\mathrm{cos}(n+\mathrm{IV})\,.\,\mathrm{sin}(n+\mathrm{VI})\,.\,\mathrm{sin}(n+\mathrm{I})\,.\,\mathrm{cos}(n+\mathrm{V})}{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{IV})\,.\,\mathrm{sin.}(n+\mathrm{V})} + \frac{\mathrm{cos}(n+\mathrm{VI})\,.\,\mathrm{sin}(n+\mathrm{I})}{\mathrm{sin.}(n+\mathrm{V})};$$

men

men da

$$-\cos(n+\mathrm{I}) = \frac{\cos(n+\mathrm{VI}).\cos(n+\mathrm{V}).\sin(n+\mathrm{I})}{\sin.(n+\mathrm{V})} + \frac{\sin(n+\mathrm{VI}).\cos(n+\mathrm{IV}).\sin(n+\mathrm{I})}{\sin.(n+\mathrm{IV}).\sin.(n+\mathrm{V})},$$

§. 39. *I.*: saa er Summen

$$c)\ -\cos(n+\mathrm{I}) - \cos(n+\mathrm{III}) = \frac{[\cos(n+\mathrm{V})+1].\sin[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})]}{\sin.(n+\mathrm{IV})} \cdot \frac{\sin(n+\mathrm{I})}{\sin(n+\mathrm{V})},$$

og naar divideres Formlen *a* med Formlen *c*, faaes:

$$-\frac{\sin.(n+\mathrm{I}) - \sin.(n+\mathrm{III})}{\cos.(n+\mathrm{I}) + \cos.(n+\mathrm{III})} = \frac{\sin.(n+\mathrm{V})}{1+\cos.(n+\mathrm{V})} \cdot \frac{\sin.(n+\mathrm{IV}) - \sin.(n+\mathrm{VI})}{\sin.[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})]};$$

men $\frac{\sin.(n+\mathrm{I}) - \sin.(n+\mathrm{III})}{\cos.(n+\mathrm{I}) + \cos.(n+\mathrm{III})} = \text{tang}.\frac{1}{2}[(n+\mathrm{I})-(n+\mathrm{III})]$, §. 19. *l*, og

$\frac{\sin.(n+\mathrm{V})}{1+\cos.(n+\mathrm{V})} = \text{tang}.\frac{1}{2}(n+\mathrm{V})$, §. 19. *f*.

Altsaa $-\text{tang}.\frac{1}{2}[(n+\mathrm{I})-(n+\mathrm{III})] = \frac{\text{tang}.\frac{1}{2}(n+\mathrm{V}).[\sin.(n+\mathrm{IV}) - \sin.(n+\mathrm{VI})]}{\sin.[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})]}$,

og da $\sin(n+\mathrm{IV}) - \sin.(n+\mathrm{VI}) = 2\cos.\frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})] \times \sin.\frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})-(n+\mathrm{VI})]$, §. 19. *h*, og

$\frac{2\cos.\frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})]}{\sin.[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})]} = \frac{1}{\sin.\frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})]}$, §. 19. *c*:

saa er $-\text{tang}.\frac{1}{2}[(n+\mathrm{I})-(n+\mathrm{III})] = \frac{\text{tang}.\frac{1}{2}(n+\mathrm{V}).\sin.\frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})-(n+\mathrm{VI})]}{\sin.\frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})]}$.

II.) Ligeledes findes ved at dividere Formlen *b* med Formlen *c*:

$$-\frac{\sin.(n+\mathrm{I}) + \sin.(n+\mathrm{III})}{\cos.(n+\mathrm{I}) + \cos.(n+\mathrm{III})} = \frac{\sin.(n+\mathrm{V})}{1+\cos.(n+\mathrm{V})} \cdot \frac{\sin.(n+\mathrm{IV}) + \sin.(n+\mathrm{VI})}{\sin.[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})]} = -\text{tang}.\frac{1}{2}[(n+\mathrm{I})+(n+\mathrm{III})],$$

§. 19. *k*,

og naar isteden for $\frac{\sin.(n+\mathrm{V})}{1+\cos.(n+\mathrm{V})}$ sættes $\text{tang}.\frac{1}{2}(n+\mathrm{V})$, §. 19. *f*, og isteden for $\sin(n+\mathrm{IV})+\sin(n+\mathrm{VI})$ sættes $2\sin\frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})].\cos\frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})-(n+\mathrm{VI})]$, §. 19. *g*, udkommer

$$\text{tang}.\frac{1}{2}(n+\mathrm{V}).\frac{2\sin.\frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})].\cos.\frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})-(n+\mathrm{VI})]}{\sin.[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})]} = -\text{tang}.\frac{1}{2}[(n+\mathrm{I})+(n+\mathrm{III})];$$

men da $\frac{2\sin.\frac{1}{2}[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]}{\sin.[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]} = \frac{1}{\cos.\frac{1}{2}[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]}$, i Følge §. 19. c:

saa er $-\tan g.\frac{1}{2}[(n+\text{I})+(n+\text{III})] = \tan g.\frac{1}{2}(n+\text{V}).\frac{\cos.\frac{1}{2}[(n+\text{IV})-(n+\text{VI})]}{\cos.\frac{1}{2}[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]}$.

§. 48.

Ere alle tre Vinkler i en sphærisk Triangel givne, findes Siderne ved hvilken man vil af følgende Formler, naar n antages = 0, II, eller IV.

I.) $\cos.(n+\text{II}) = \frac{\cos.(n+\text{I}).\cos.(n+\text{III}) - \cos.(n+\text{V})}{\sin.(n+\text{I}).\sin.(n+\text{III})}$, §. 39. Eqv. *III.*

II.) $\left\{\begin{array}{l} \cos.(n+\text{II}) = -\frac{\cos.[(n+\text{V})-\psi]}{\cos.\psi.\sin.(n+\text{I}).\sin.(n+\text{III})}, \text{ og} \\ \tan g.\psi = -\frac{\cos.(n+\text{I}).\cos.(n+\text{III})}{\sin.(n+\text{V})}. \end{array}\right\}$ §. 40.

III.) $\sin^2\frac{1}{2}(n+\text{II}) = \frac{\sin\frac{1}{2}[(n+\text{III})+(n+\text{V})+(n+\text{I})].\sin\frac{1}{2}[(n+\text{III})+(n+\text{I})-(n+\text{V})]}{\sin.(n+\text{III}).\sin.(n+\text{I})}$,

§. 45.

Sættes i den første af disse tre Formler

a) $n+\text{I} = 90^\circ$, bliver $\cos.(n+\text{II}) = -\cos.(n+\text{V}):\sin.(n+\text{III})$.

b) $n+\text{III} = 90^\circ$, - - $\cos.(n+\text{II}) = -\cos.(n+\text{V}):\sin.(n+\text{I})$.

c) $n+\text{V} = 90^\circ$, - - $\cos.(n+\text{II}) = \cot.(n+\text{I}).\cot.(n+\text{III})$.

§. 49.

Af to Vinkler og deres fælles Side givne bestemmes

A.) Den givne Sides modstaaende Vinkel ved Formlen *IV*, eller *V*, naar sættes n = 0, eller II, eller IV.

IV.) $\cos(n+\text{I}) = \cos(n+\text{III}).\cos(n+\text{V}) - \sin(n+\text{III}).\cos(n+\text{IV}).\sin(n+\text{V})$,

§. 38. Eqv. *I.*

V.) $\left\{\begin{array}{l} \cos.(n+\text{I}) = \frac{\sin.\left[\begin{matrix}(n+\text{III})+\phi'\\(n+\text{V})+\phi\end{matrix}\right].\cos.\left[\begin{matrix}n+\text{V}\\n+\text{III}\end{matrix}\right]}{\sin.\left[\begin{matrix}\phi'\\\phi\end{matrix}\right]}, \text{ og} \\ \cot.\left[\begin{matrix}\phi'\\\phi\end{matrix}\right] = -\cos.(n+\text{IV}).\tan g.\left[\begin{matrix}n+\text{V}\\n+\text{III}\end{matrix}\right]. \end{array}\right\}$ §. 41.

I Eqva-

I Æqvationen *IV.* giver

a) $n+\mathrm{III} = 90°$: $\cos.(n+\mathrm{I}) = -\cos.(n+\mathrm{IV}).\sin.(n+\mathrm{V})$.

b) $n+\mathrm{V} = 90°$: $\cos.(n+\mathrm{I}) = -\cos.(n+\mathrm{IV}).\sin.(n+\mathrm{III})$.

c) $n+\mathrm{IV} = 90°$: $\cos.(n+\mathrm{I}) = \cos.(n+\mathrm{III}).\cos.(n+\mathrm{V})$.

B.) De to andre Sider findes ved hvilken som helst af følgende Formler, hvori ligeledes maa antages $n = 0$, eller II, eller IV.

$$VI.)\quad -\cot.(n+\mathrm{II}) = \frac{\cot.(n+\mathrm{V}).\sin.\begin{bmatrix}n+\mathrm{III}\\ n+\mathrm{I}\end{bmatrix}}{\sin.\begin{bmatrix}n+\mathrm{IV}\\ n+\mathrm{VI}\end{bmatrix}} + \cot.\begin{bmatrix}n+\mathrm{IV}\\ n+\mathrm{VI}\end{bmatrix}.\cos.\begin{bmatrix}n+\mathrm{III}\\ n+\mathrm{I}\end{bmatrix},$$

§. 39. Æqv. *I.*

$$VII.)\ \left\{\begin{matrix} -\cot.(n+\mathrm{II}) = \dfrac{\sin.\begin{bmatrix}(n+\mathrm{I})+\phi'\\ (n+\mathrm{III})+\phi\end{bmatrix}}{\sin.\begin{bmatrix}\phi'\\ \phi\end{bmatrix}}.\cot.\begin{bmatrix}n+\mathrm{VI}\\ n+\mathrm{IV}\end{bmatrix},\ \text{og} \\ \tang.\begin{bmatrix}\phi'\\ \phi\end{bmatrix} = \tang.(n+\mathrm{V}).\cos.\begin{bmatrix}n+\mathrm{VI}\\ n+\mathrm{IV}\end{bmatrix}. \end{matrix}\right\}\ \text{§. 42.}$$

$$VIII.)\ \left\{\begin{matrix} -\tang\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{II})-(n+\mathrm{IV})] = \tang\tfrac{1}{2}(n+\mathrm{VI}).\dfrac{\sin\frac{1}{2}[(n+\mathrm{V})-(n+\mathrm{I})]}{\sin\frac{1}{2}[(n+\mathrm{V})+(n+\mathrm{I})]}. \\ -\tang\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{II})+(n+\mathrm{IV})] = \tang\tfrac{1}{2}(n+\mathrm{VI}).\dfrac{\cos\frac{1}{2}[(n+\mathrm{V})-(n+\mathrm{I})]}{\cos\frac{1}{2}[(n+\mathrm{V})+(n+\mathrm{I})]}. \end{matrix}\right\}\ \text{§. 47.}$$

Er i den *VI*te Formel

d) $n+\mathrm{III} = 90°$, bliver $-\cot.(n+\mathrm{II}) = \cot.(n+\mathrm{V}):\sin.(n+\mathrm{IV})$.

e) $n+\mathrm{IV} = 90°$, - - $-\cot.(n+\mathrm{II}) = \cot.(n+\mathrm{V}).\sin.(n+\mathrm{III})$.

f) $n+\mathrm{V} = 90°$, - - $-\cot.(n+\mathrm{II}) = \cot.\begin{bmatrix}n+\mathrm{VI}\\ n+\mathrm{IV}\end{bmatrix}.\cos.\begin{bmatrix}n+\mathrm{I}\\ n+\mathrm{III}\end{bmatrix}$.

g) $n+\mathrm{I} = 90°$, - - $-\cot.(n+\mathrm{II}) = \cot.(n+\mathrm{V}):\sin.(n+\mathrm{VI})$.

h) $n+\mathrm{VI} = 90°$, - - $-\cot.(n+\mathrm{II}) = \cot.(n+\mathrm{V}).\sin.(n+\mathrm{I})$.

§. 50.

Af een Vinkel og to Sider, hvoraf den ene staaer lige over for den givne Vinkel, findes

A.) Den tredie Side ved følgende *IX*de Formel, naar sættes $n = 0,\ \text{II}$, eller IV.

$$IX.)\ \left\{\begin{array}{l} \text{sin.}\begin{bmatrix}(n+\text{II})+\phi'\\(n+\text{II})+\phi\end{bmatrix} = \dfrac{\text{cos.}\begin{bmatrix}n+\text{VI}\\n+\text{IV}\end{bmatrix}.\ \text{sin.}\begin{bmatrix}\phi'\\\phi\end{bmatrix}}{\text{cos.}\begin{bmatrix}n+\text{IV}\\n+\text{VI}\end{bmatrix}},\ \text{og}\\[2ex] \text{cot.}\begin{bmatrix}\phi'\\\phi\end{bmatrix} = -\,\text{cos.}\begin{bmatrix}n+\text{III}\\n+\text{I}\end{bmatrix}.\ \text{tang.}\begin{bmatrix}n+\text{IV}\\n+\text{VI}\end{bmatrix}. \end{array}\right\}\ §.\ 43.$$

	Er	bliver	i Følge	naar sættes isteden for n
a)	$n+\text{III} = 90°$,	$\text{cos.}(n+\text{II}) = \dfrac{\text{cos.}(n+\text{VI})}{\text{cos.}(n+\text{IV})}$,	§. 49. *c*,	$n+\text{V}$.
b)	$n+\text{I} = 90°$,	$\text{cos.}(n+\text{II}) = \dfrac{\text{cos.}(n+\text{IV})}{\text{cos.}(n+\text{VI})}$,	§. 49. *c*,	$n+\text{III}$.
c)	$n+\text{IV} = 90°$,	$\text{sin.}(n+\text{II}) = -\dfrac{\text{cos.}(n+\text{VI})}{\text{cos.}(n+\text{III})}$,	§. 49. *b*,	$n+\text{V}$.
d)	$n+\text{VI} = 90°$,	$\text{sin.}(n+\text{II}) = -\dfrac{\text{cos.}(n+\text{IV})}{\text{cos.}(n+\text{I})}$,	§. 49. *a*,	$n+\text{III}$.

B.) De to givne Siders indsluttede Vinkel udledes af følgende Formel *X*, naar sættes $n = 0,\ \text{II}$, eller IV.

$$X.)\ \left\{\begin{array}{l} \text{sin.}\begin{bmatrix}(n+\text{I})+\phi'\\(n+\text{I})+\phi\end{bmatrix} = -\,\text{cot.}\begin{bmatrix}n+\text{II}\\n+\text{VI}\end{bmatrix}.\ \text{tang.}\begin{bmatrix}n+\text{VI}\\n+\text{II}\end{bmatrix}.\ \text{sin.}\begin{bmatrix}\phi'\\\phi\end{bmatrix},\ \text{og}\\[2ex] \text{tang.}\begin{bmatrix}\phi'\\\phi\end{bmatrix} = \text{tang.}\begin{bmatrix}n+\text{V}\\n+\text{III}\end{bmatrix}.\ \text{cos.}\begin{bmatrix}n+\text{VI}\\n+\text{II}\end{bmatrix}. \end{array}\right\}\ §.\ 44.$$

	Er	bliver	i Følge	naar for n sættes
e)	$n+\text{III} = 90°$,	$\text{cos}(n+\text{I}) = -\,\text{cot}(n+\text{VI}).\,\text{tang}(n+\text{II})$,	§. 49. *f*,	$n+\text{IV}$.
f)	$n+\text{V} = 90°$,	$\text{cos}(n+\text{I}) = -\,\text{cot}(n+\text{II}).\,\text{tang}(n+\text{VI})$,	§. 49. *f*.	
g)	$n+\text{VI} = 90°$,	$\text{sin}(n+\text{I}) = -\,\text{cot}(n+\text{II}).\,\text{tang}(n+\text{V})$,	§. 49. *h*.	
h)	$n+\text{II} = 90°$,	$\text{cot}(n+\text{I}) = -\,\text{cot}(n+\text{V}) : \text{cos}(n+\text{VI})$,	§. 49. *f*,	$n+\text{III}$.

C.) Den anden givne Sides modstaaende Vinkel sluttes af Formelen *XI*.

$$XI.)\ \text{sin.}(n+\text{I}) = \frac{\text{sin.}(n+\text{IV}).\ \text{sin.}\begin{bmatrix}n+\text{III}\\n+\text{V}\end{bmatrix}}{\text{sin.}\begin{bmatrix}n+\text{VI}\\n+\text{II}\end{bmatrix}},\ §.\ 39.\ \text{Æqv.}\ II.$$

§. 51.

Naar i de tre foregaaende Opgaver, §. 48, 49, 50, isteden for Sider sættes Vinkler, og isteden for Vinkler sættes Sider, opløses de ved at antage i de anførte Formler, n at være = I, eller III, eller V, §. 39.

§. 52.

Er i en sphærisk Triangel Siderne mindre end to rette og positive, da kan ogsaa Vinklerne antages at være af samme Beskaffenhed; thi at den første Vinkel kan tælles positiv, og være mindre end to rette, viser §. 37. Fig. 6; men at de to andre Vinkler ere af samme Art som den første, sees af Formlen $\text{sin. I} = \dfrac{\text{sin. IV . sin.} \begin{bmatrix}\text{III}\\ \text{V}\end{bmatrix}}{\text{sin.} \begin{bmatrix}\text{VI}\\ \text{II}\end{bmatrix}}$, §. 50. *XI.* I det følgende forudsættes Vinkler og Sider at være mindre end 180°.

§. 53.

En sphærisk Triangel bestemmes fuldkommen, hvis Siderne ere mindre end to rette, af tre givne Vinkler; tre givne Sider; to Vinkler og disses fælles Side; eller to Sider og indsluttede Vinkel, hvilket sees af Formlerne §. 48, 49, og Sætningen §. 51.

§. 54.

Af foregaaende Formler følger ogsaa, at ligestore Vinkler staae lige over for lige store Sider, og omvendt; f. Ex. naar i Formlen *IV.* §. 49 sættes I = III, da er IV = VI; thi cos. I = cos. III . cos. V — sin. III . cos. IV . sin. V, og cos. III = cos. V . cos. I — sin. V . cos. VI . sin. I. (Den sidste Æqvation faaes af den første ved at forøge Tallene med II).

§. 55.

Den større Vinkel modsættes den mindre Side, og omvendt. Følger af Formlen §. 47 — $\text{tang.} \tfrac{1}{2}(\text{I} - \text{III}) = \text{tang.} \tfrac{1}{2}\text{V} . \dfrac{\text{sin.} \frac{1}{2}(\text{IV} - \text{VI})}{\text{sin.} \frac{1}{2}(\text{IV} + \text{VI})}$; thi naar I — III er negativ, maa IV — VI være positiv.

§. 56.

Hver to Sider ere tilsammen større end den tredie, og alle tre Sider tilsammen mindre end fire Rette; thi i Følge §. 45 og 46 er

$$\text{cos.}^2 \tfrac{1}{2}(\text{I}) = \frac{\text{sin.} \frac{1}{2}(\text{IV} + \text{II} - \text{VI}) \cdot \text{sin.} \frac{1}{2}(\text{IV} - \text{II} + \text{VI})}{\text{sin. II} \cdot \text{sin. VI}}, \text{ og}$$

$$\text{sin.}^2 \tfrac{1}{2}(\text{I}) = \frac{\text{sin.} \frac{1}{2}(\text{IV} + \text{II} + \text{VI}) \cdot \text{sin.} \frac{1}{2}(\text{VI} + \text{II} - \text{IV})}{\text{sin. VI} \cdot \text{sin. II}};$$

men sættes i første Æqvation $\text{VI} > \text{IV} + \text{II}$, saa maa ogsaa II være større end $\text{IV} + \text{VI}$; thi ellers blev $\text{cos.}^2 \frac{1}{2}(\text{I})$ negativ; men det er umueligt at VI kan være større end $\text{IV} + \text{II}$, naar $\text{II} > \text{IV} + \text{VI}$; ej heller kan VI være $= \text{IV} + \text{II}$; thi da blev $\text{cos.}^2 \frac{1}{2}(\text{I}) = 0$. Følgelig maa VI være $< \text{IV} + \text{II}$, og i Almindelighed to Sider større end tredie Side; altsaa er i anden Æqvation $\text{sin.} \frac{1}{2}(\text{VI} + \text{II} - \text{IV})$ positiv; altsaa ogsaa $\text{sin.} \frac{1}{2}(\text{IV} + \text{II} + \text{VI})$ positiv; følgelig $\frac{\text{IV} + \text{II} + \text{VI}}{2} < 180^\circ$ (§. 52), og $\text{IV} + \text{II} + \text{VI}$ er mindre end 360°.

§. 57.

Ligeledes bevises at de to Vinkler ere tilsammen større end den tredie, og Summen af alle tre mindre end fire Rette, hvilket ogsaa følger af §. 37. No. 6. *a*, og §. 56.

§. 58.

Naar man paa en Halvkugle fra et Punct C (Fig. 12) mellem Grundcirkelens Pol P og dens Omkreds trækker Storbuen CB ned til Grundens Peripherie (*), da er CB mindst, naar den endes i r, hvor Perpendicularen PC forlænget skiær Grundcirkelens Omkreds; derefrer voxer den fra Cr til at den bliver $= 90^\circ = \text{rQ} = \text{CQ}$, og endnu derefter lige til at den bliver $= 180^\circ - \text{Cr}\ (= \text{Cq})$, saa at B falder under QR, naar CB er stump; men er CB spids, falder B over QR.

Thi

(*) Kästners Mathematikens Begyndelsesgrunde, oversat af Hr. Professor Wolf. Den sphæriske Trigonometries anden Sætning, Pag. 517.

Thi lad CBq betegnes ved i, Hypotenusen BC ved ii, Catheten Cr ved iv, og rB ved vi: saa er i Følge §. 49. *c* (nemlig naar sættes i isteden for n) $\cos.\,\text{ii} = \cos.\,\text{iv}\,.\,\cos.\,\text{vi}$, eller $\cos.\,BC = \cos.\,Cr\,.\,\cos.\,rB$, hvoraf Paastandens Rigtighed letteligen indsees.

Imedens rB voxer fra 0 til 90°, og CB fra Cr til CQ (= 90°), voxer Vinkelen CBq fra 90° til 180° — Cr; men derefter, naar rB voxer fra 90° til 180°, og CB fra 90° til 180° — Cr, aftager CBq fra 180° — Cr til 90°; thi naar i §. 49. *h* isteden for n sættes v, bliver v = 90°, og $-\cot.\,\text{i} = \cot.\,\text{iv} \times \sin.\,\text{vi}$, eller $-\cot.\,CBq = \cot.\,Cr\,.\,\sin.\,rB$, af hvilken Formel Sætningens Beviis er let at udlede.

§. 59.

Antages en Triangels Sider (ii, iv, vi) at være mindre end to Rette, og i Æqvationen $\sin.\,\text{i} = \dfrac{\sin.\,\text{iv}\,.\,\sin.\,\text{v}}{\sin.\,\text{ii}}$ (§. 50. *XI.*) Buerne iv, v, ii ere skieve: da viser følgende Tabel, i hvilke Tilfælde den søgte Vinkel i er spids, stump eller tvetydig.

Er nemlig

1	v stump,	iv stump,	og ii < 180° — iv,	saa er i	tvetydig.
2			ii > 180° — iv,		spids.
3	v spids,	iv spids,	ii > 180° — iv,	- - i	tvetydig.
4			ii < 180° — iv,		stump.
5	v stump,	iv spids,	ii < iv,	- - i	tvetydig.
6			ii > iv,		stump.
7	v spids,	iv stump,	ii > iv,	- - i	tvetydig.
8			ii < iv,		spids.

9] ii = iv, og da er i = v.
10] ii + iv = 180°, - i = 180° — v.

Beviis. Da ingen af Siderne i Triangelen ABC (Fig. 13-18) ere større end 180°, saa falder hele Triangelen paa en af de Halvkuglers Overflade, som afskiæres ved Planet af Siden AB (= vi), og da Siderne ii og iv ere skieve, mødes de i et Punct C udenfor Grundcirkelens ABD Pol P. Man kan altsaa fra Polen P uddrage Storbuen PC til begge Sider, og ligeledes dens Perpendicular QPR, til at begge naae Grundcirkelens Omkreds. Disse to Halvcirkler forestilles i Figurerne 13-18 ved de to rette Linier rq og QR.

1) Fordi IV er stump og II spids, falder A (Fig. 13) under QR, og B saavelsom det yderste Punct D af Halvcirkelen ACD falder over QR, §. 58. Men da Buen 180° — IV (= CD) forudsættes at være større end II (= CB): saa maa denne falde imellem Cr og CD, eller ogsaa imellem Cr og CQ, §. 58, og maa paa begge Steder kunne have samme Størrelse. I det ene Tilfælde bliver I spids, i det andet stump; altsaa er I tvetydig.

2) Da Buen II antages > 180° — IV, eller II > CD (Fig. 14), saa er CDR < CBA (§. 55), eller V < 180° — I; men V antages stump, altsaa er I spids.

3) IV er spids og II stump, følgelig falder A (Fig. 15) over, men B under QR. Og da Buen II > 180° — IV, kan den i Følge §. 58 have samme Størrelse, saavel mellem CD og Cq, som i ligestor men modsat Afvigning fra Cq. I kan altsaa være spids eller stump, §. 58.

4) Efter Betingelsen er II < 180° — IV, eller II < CD (Fig. 16); altsaa er i △ CBD CDQ > CBA, eller V > 180° — I (§. 55); men V er spids, altsaa I stump.

5) II og IV antages begge spidse; altsaa ere B, A og C (Fig. 17) paa samme Side af QR (§. 58); og da antages II < IV, saa kan B falde paa begge Sider af Cr; paa den ene Side bliver I stump, paa den anden spids (§. 58), altsaa er I tvetydig.

6) II > IV, altsaa V < I (§. 55); men V er stump, altsaa I stump.

7) Da II og IV ere begge stumpe, saa overskiære de Perpendicularen QR (Fig. 18) imellem Puncterne Q og R (§. 58). Og da II > IV, saa kan Buen II enten ligge imellem IV og Cq, eller paa den anden Side af Cq. Altsaa Vinkelen I enten være spids eller stump (§. 58).

8) Naar

8) Naar $\text{ii} < \text{iv}$, er $\text{v} > \text{i}$ (§. 55), altsaa, naar v er spids, bliver ogsaa i spids.

9) $\text{ii} = \text{iv}$ giver $\text{v} = \text{i}$ (§. 54).

10) $\text{ii} + \text{iv} = 180^\circ$, giver $\text{i} = 180^\circ - \text{v}$, fordi Supplementerne til ii og iv danne tilligemed AB (Fig. 19) en anden Δ ABC′, hvis Vinkler og Sider ere saa store som de i Δ ABC (§. 53).

§. 60.

Forudsættes der ligesom i foregaaende §. 59 at Triangelens Sider (ii, iv, vi) ere $< 180^\circ$, men i Æqvationen $\sin.\text{i} = \frac{\sin.\text{iv}\,.\,\sin.\text{v}}{\sin.\text{ii}}$ (§. 50, *XI.*) to af de givne Stykker (v, iv, ii) ere rette: da er

$\text{i} = 180^\circ - \text{iv}$, hvis v og ii ere rette, (Fig. 19).
$\text{i} = 90^\circ = \text{ii}$, - v og iv ere rette.
$\text{i} = 90^\circ = \text{v}$, - iv og ii ere rette.

Er derimod kun et af de givne Stykker ret; da er enten

$$\left.\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}\ \text{v ret og iv}\left\{\begin{matrix}> \text{ii}\\ < \text{ii}\end{matrix}\right\},\quad \text{hvoraf følger i er}\left\{\begin{matrix}\text{spids}\\ \text{stump}\end{matrix}\right\},\ \text{eller}$$

$$\left.\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right\}\ \text{v spids, iv ret,}\quad \text{og ii}\left\{\begin{matrix}\text{spids}\\ \text{stump}\end{matrix}\right\},\ \text{- - i er}\left\{\begin{matrix}\text{umuelig}\\ \text{tvetydig}\end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix}5\\6\end{matrix}\right\}\ \text{v stump, iv ret,}\quad \text{og ii}\left\{\begin{matrix}\text{stump}\\ \text{spids}\end{matrix}\right\},\ \text{- - i er}\left\{\begin{matrix}\text{umuelig}\\ \text{tvetydig}\end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix}7\\8\end{matrix}\right\}\ \text{v spids, iv}\left\{\begin{matrix}\text{stump}\\ \text{spids}\end{matrix}\right\},\ \text{og ii ret, - - - i er}\left\{\begin{matrix}\text{spids}\\ \text{stump}\end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix}9\\10\end{matrix}\right\}\ \text{v stump, iv}\left\{\begin{matrix}\text{stump}\\ \text{spids}\end{matrix}\right\},\ \text{og ii ret, - - - i er}\left\{\begin{matrix}\text{spids}\\ \text{stump}\end{matrix}\right\}.$$

Beviis. No. 1 og 2 følge deraf, at den større Side staaer lige over for den mindre Vinkel (§. 55).

No. 3 og 5 ere umuelige; thi naar iv er ret, kan v og ii hverken være begge spidse, eller begge stumpe, fordi $-\cot.\text{ii} = \cot.\text{v}\,.\,\sin.\text{iii}$ (§. 49. *e*).

I 7, 8, 9, 10 ere i og v af forskiellig Slags, fordi naar $ii = 90°$, er $-\text{cot. iv} = \text{cot. i} . \text{sin. iii}$, hvilket følger af §. 49. *h*, naar antages $n = ii$.

No. 4 og 6 kan bevises saaledes: Enten ii er stump og v spids, som i No. 4, og i $\triangle$ ACB Fig. 20, eller ii er spids og v stump, som i No. 6, og i $\triangle$ ACB′; saa kan der formeres af ii tilligemed Supplementerne til iv og vi en anden $\triangle$ A′BC, eller A′B′C, hvori ii, iv og v beholde samme Størrelse; men Vinkelen i forandres til sit Supplement. Følgelig kan der af samme Data ii, iv, v dannes to forskiellige Triangler.

§. 61.

I Følge §. 37. No. 6. *a* kan enhver Triangel forvandles til en anden, hvori Vinklerne ere den forrige Triangels Sider, og Siderne den forriges Vinkler, Ordenen forresten uforandret. Følgelig naar af vi, v, iii givne skal findes ii efter Formlen $\text{sin. ii} = \frac{\text{sin. v} . \text{sin. vi}}{\text{sin. iii}}$: kan det Givne og Søgte betegnes ligesom i §. 59, 60, og de der anførte Regler ogsaa i dette Tilfælde anvendes.

§. 62.

Da Formlerne *IX.* og *X.* §. 50 ere udledte af en Æqvation, der indeholder baade Cosinus og Sinus af den søgte Bue: saa kunde formodes at de ikke skulde, som Æqv. *XI.* §. 50, give det Søgte nogen positiv Værdie, som var mindre end 180°, og ei stemte overeens med Triangelens Data, naar disse vare alle positive og mindre end to Rette; men for herom fuldkommen at overbevises, sætter jeg:

1) At $n^{-} + ii^{-}$ er positiv, mindre end to Rette, og en Værdie af $n + ii$, der ved Hielp af Æqv. *IX.* §. 50 er beregnet af de Data: $n + iii$, $n + iv$, $n + vi$. Dernæst slutter jeg, at i en Triangel, hvori gives $n^{-} + ii^{-}$, $n + iii$ og $n + iv$, og hvori det som staaer lige over for $n + iii$ kaldes $n^{-} + vi^{-}$, er i Følge §. 49. *IV*de Æqv. $\text{cos.}(n^{-} + vi^{-}) = \text{cos.}(n^{-} + ii^{-}) . \text{cos.}(n + iv) - \text{sin.}(n^{-} + ii^{-}) . \text{cos.}(n + iii) . \text{sin.}(n + iv)$; men den samme Værdie faaer $\text{cos.}(n + vi)$, naar i Æqvationen $\text{sin.}[(n^{-} + ii^{-}) + \varphi'] = \frac{\text{cos.}(n + vi)}{\text{cos.}(n + iv)} . \text{sin.}\,\varphi'$ (§. 50. *IX.*) Sinus til Summen udtrykkes ved Parternes Cosinus og Sinus

Sinus, derefter divideres med $\sin.\varphi'$, og tilsidst sættes $-\cos.(n+\mathrm{III}) \times \mathrm{tang}.(n+\mathrm{IV})$ isteden for $\cot.\varphi'$. Følgelig bliver $n+\mathrm{VI} = \bar{n}+\overline{\mathrm{VI}}$, og altsaa kan den beregnede Værdie $\bar{n}+\overline{\mathrm{II}}$ og de givne Stykker $n+\mathrm{III}$, $n+\mathrm{IV}$, $n+\mathrm{VI}$ tilhøre en og den samme Triangel.

2) Ligeledes antager jeg i *X* de Æqv. §. 50 at $\bar{n}+\bar{\mathrm{I}}$ er en Værdie af $n+\mathrm{I}$, tillige at den er positiv, mindre end $180°$, og beregnet af de Data $n+\mathrm{II}$, $n+\mathrm{V}$, $n+\mathrm{VI}$; derefter slutter jeg i Følge §. 49. Æqv. *VI*, at i en Triangel, hvori gives $\bar{n}+\bar{\mathrm{I}}$, $n+\mathrm{V}$ og $n+\mathrm{VI}$, og hvori det $n+\mathrm{V}$ modstaaende Stykke betegnes ved $\bar{n}+\overline{\mathrm{II}}$, er $-\cot(\bar{n}+\overline{\mathrm{II}}) = \dfrac{\cot(n+\mathrm{V}).\sin(\bar{n}+\bar{\mathrm{I}})}{\sin(n+\mathrm{VI})}$ $+ \cot.(n+\mathrm{VI}).\cos.(\bar{n}+\bar{\mathrm{I}})$, eller ved at dividere med $\cot.(n+\mathrm{VI})$, $-\cot.(\bar{n}+\overline{\mathrm{II}}).\mathrm{tang}.(n+\mathrm{VI}) = \dfrac{\cot.(n+\mathrm{V}).\sin.(\bar{n}+\bar{\mathrm{I}})}{\cos.(n+\mathrm{VI})} + \cos.(\bar{n}+\bar{\mathrm{I}})$; men denne samme Formel udkommer for $\cot.(n+\mathrm{II})$, naar i Æqvationen *X*. §. 50 $\sin.[(\bar{n}+\bar{\mathrm{I}})+\varphi']$ udtykkes ved Cosinus og Sinus af $\bar{n}+\bar{\mathrm{I}}$ og af φ', derefter divideres med $\sin.\varphi'$, og tilsidst sættes isteden for $\cot.\varphi'$ dens Værdie; følgelig er $\bar{n}+\overline{\mathrm{II}} = n+\mathrm{II}$, og altsaa høre $\bar{n}+\bar{\mathrm{I}}$, $n+\mathrm{II}$, $n+\mathrm{V}$, $n+\mathrm{VI}$ til samme Triangel.

§. 63.

Saaledes kan der ogsaa construeres en Triangel, hvis Sider og Vinkler ere mindre end to Rette, af to i hver af Æqvationerne *c*, *d*, *g*, §. 50 givne Stykker tilligemed det Søgtes Værdie, naar denne kun er positiv og under $180°$; tillige kan bevises, at det tredie givne Stykke ogsaa tilhører den construerede Triangel, følgelig at det Søgtes beregnede Værdie alletider kan bestaae med de givne Stykker; f. Ex. i Følge §. 50. *c* er $n+\mathrm{IV} = 90°$, og $\sin.(n+\mathrm{II}) = -\dfrac{\cos.(n+\mathrm{VI})}{\cos.(n+\mathrm{III})}$, lad nu $\bar{n}+\overline{\mathrm{II}}$ være det Søgtes Værdie, og af $\bar{n}+\overline{\mathrm{II}}$, $n+\mathrm{IV}$ og $n+\mathrm{III}$ lad construeres en Triangel, hvori det som staaer lige over for $n+\mathrm{III}$ kaldes $\bar{n}+\overline{\mathrm{VI}}$: saa er $\cos.(\bar{n}+\overline{\mathrm{VI}}) = -\sin.(\bar{n}+\overline{\mathrm{II}}).\cos.(n+\mathrm{III})$ §. 49. *b*; men $\cos.(n+\mathrm{VI})$ er ogsaa $= -\sin.(\bar{n}+\overline{\mathrm{II}}).\cos.(n+\mathrm{III})$, §. 50. *c*; altsaa $n+\mathrm{VI} = \bar{n}+\overline{\mathrm{VI}}$.

Jeg tilføier endnu følgende, for at vise, hvordan de i 30te og 31te §. antagne Directionstegn kunne anvendes til at udtrykke en Æqvation for retlinede Polygoner, hvis Sider udstrækkes i forskiellige Planer.

§. 64.

Et Polygon af omtalte Beskaffenhed er ubestemt, naar det har fire Sider af ubekiendt Længde.

Beviis.

1) Lad de fire af Længde ubekiendte Sider følge efter hinanden, og være ab, bc, cd og de, Fig. 21. Hvis da Puncterne a, b og c ere i en ret Linie, kan ab forkortes, og cb ligesaa meget forlænges, uden at disse to Liniers Direction, eller de øvriges Direction og Længde paa nogen Maade forandres. Altsaa ere de to Polygonets Sider i dette Fald ubestemte.

Er hverken abc eller cde en ret Linie, men abc er i samme Plan som cde; da kan i dette Plan, udenfor Punctet c, drages med bc og cd Paralleler, som skiære ab og de. Altsaa er ogsaa i dette Fald Polygonet ubestemt.

Er Triangelen abc ikke i samme Plan som Triangelen cde; da maae dog disse Trianglers Planer skiære hinanden i en ret Linie dragen igiennem Punctet c, og fra Puncter i denne Linie, udenfor c, maae kunne trækkes med cd og bc Paralleler, som skiære ab og de. Altsaa bliver endnu Polygonet ubestemt.

2) Siderne af ethvert retlinet Polygon kan man give hvad Orden man vil, uden derved at forandre deres Sum, Direction og Længde, §. 2. Altsaa, dersom ab, bc, cd og de ei følge efter hinanden i uafbrudt Orden, ligesom i foregaaende Beviis er antaget: da kan man forestille sig et andet Polygon, hvori Siderne ere de samme, men de fire af Længde ubekiendte ere i et sammenhængende Følge. Og da nogle af disse fire kunne i denne Orden have uendelig mange Værdier efter første Beviis: saa

saa maae de ogsaa kunne have ligesaa mange, naar de igien omsættes i forrige Orden, §. 2.

§. 67.

I ethvert retlinet Polygon, hvori Siderne ei ligge alle i samme Plan, forudsættes, hver Side at begynde der, hvor foregaaende ophører, hvorfor ogsaa Summen af dem alle bliver = o i Følge §. 2. Dernæst antages, at Længden af første, anden, tredie, ..., mte eller sidste Side betegnes ved et Mærke af samme Orden i Rækken $|\mathrm{I}^{\cup}$, $|\mathrm{III}^{\cup}$, $|\mathrm{V}^{\cup}$, $|\mathrm{VII}^{\cup}$, ..., $|(2m-1)^{\cup}$, og Siderne selv i den Orden, de følge hinanden, ved de uefne Tal $\mathrm{I}^{\cup}$, $\mathrm{III}^{\cup}$, $\mathrm{V}^{\cup}$, $\mathrm{VII}^{\cup}$, ..., $(2m-1)^{\cup}$ med en tilføiet Tøddel øverst til høire Haand, for at skille Siden fra Vinkelen, som Planet igiennem samme Side og foregaaende giør med Planet igiennem hiin og følgende Side; thi disse Planernes Vinkler betegnes ogsaa ved Tallene I, III, V, ..., $(2m-1)$; saa at I (Fig. 22) er de to Planers Vinkel, der overskiære hinanden i Linien $\mathrm{I}^{\cup}$, eller Vinkelen mellem Planerne CDA og DAB; III Vinkelen mellem dem, der overskiære hinanden i Linien $\mathrm{III}^{\cup}$, eller Vinkelen mellem Planerne DAB og ABC, o. s. f. $(2m-1)$ er Vinkelen, som Planet igiennem sidste og første Side giør med Planet giennem sidste og næstsidste.

End videre antages, at Vinkelen, som hver Side afviger fra foregaaendes Forlængning, betegnes ved det efne Tal II, IV, VI, ..., eller $2m$, hvilket er een Unitet større end foregaaende Sides Tal; II er nemlig Vinkelen, som $\mathrm{III}^{\cup}$ afviger fra Forlængningen af $\mathrm{I}^{\cup}$; IV er Vinkelen, som $\mathrm{V}^{\cup}$ afviger fra Forlængningen af $\mathrm{III}^{\cup}$, o. s. f., $2m$ er Vinkelen, som første Side $\mathrm{I}^{\cup}$ afviger fra sidste Sides $(2m-1)^{\cup}$ Forlængning.

§. 66.

Alle disse saavel Planernes som Sidernes Vinkler kan man antage for positive, og efter eget Tykke fastsætte, om en Sides Afvigning fra foregaaendes Forlængning skal tages for større eller for mindre end to Rette. Men efterat dette er fastsat, bliver det ei længere ligegyldigt, hvordan Planernes Skraaehed

skal

skal maales, om ellers Reglerne for disse Polygoners Opløsning skulle gielde for alle Tilfælde.

§. 67.

Skal Planernes indbyrdes Hælding efter een og den samme Regel maales, maa man forestille sig tre af Polygonets Sider, der følge i sammenhængende Rad efter hinanden, ligesom i Fig. 23 Linien fra a til b, den fra b til c, og den fra c til d; derefter drage fra midterste Sides bc sidste Punct c en Parallel cf med foregaaende Side ab; beskrive om samme Punct c som Center fra Parallelen cf til midterste Sides Forlængning cg en Cirkelbue fg, der maaler den Vinkel cbe, som midterste Side afviger fra foregaaendes Forlængning be; ligeledes om samme Center og med samme Radius en Cirkelbue gi fra midterste Sides Forlængning cg til følgende Side cd. Den sphæriske Vinkel igh, som den sidst beskrevne Bue gi afviger fra Forlængningen gh af den første Bue fg, bliver da saa stor som Vinkelen, Planet igiennem midterste og følgende Side afviger fra Planet igiennem midterste og foregaaende, eller saa stor som Planets bcd Afvigning fra Planet abc. Og denne Vinkel maales paa den Maade, at, naar man paa Sphæren følger Buen fg, og kommer fra f til g, saa gaaer Vinkelens Maal fra Forlængningen af fg til venstre Haand. Saaledes kunne disse Vinkler bestemmes, naar man i et Polygon vil vide nogle af dem, for at kunne beregne de øvrige.

§. 68.

Men ere Sidernes Directioner i et Polygon Fig. 22 paa lidet nær bekiendte, kunne dets Vinkler tydeligere forestilles, naar fra Centret c af Kuglen wqhv (Fig. 24) drages de Radier cA, cB, cC og cD af den Direction, at hver for sig bliver parallel med Siden af samme Orden i Rækken I°, III°, V°, VII°, Fig. 22; thi da faaes ved at drage Storbuerne AB, BC, CD og DA et sphærisk Polygon ABCD, hvoraf Siderne maale det retlinede Polygons Vinkler II, IV, VI, VIII, og de sphæriske Vinkler ere de samme som Planernes Vinkler

I, III,

I, III, V, VII i den retlinede Figur 22 (*). For et saadant retlinet Polygons Vinkler har man altsaa samme Æqvation som for et sphærisk Polygon, nemlig $s \,,, \mathrm{I}' \,,, \mathrm{II}' \,,, \mathrm{III}' \,,, \mathrm{IV}' \,,, \ldots \,,, (2m)' = s$ (§. 37). s kan her betegne enhver ret Linie, og 2m er det retlinede Polygons sidste Vinkel, eller første Sides Afvigning fra den mte (det er den sidste) Sides Forlængning.

§. 69.

Nu sætter jeg, at $Aw\gamma hp$ (Fig. 24) er Horizonten, $A\pi q\upsilon$ er Verticalcirkelen, A er begge Cirklers fælles Nulpunct; de horizontale Buer tælles positive til Venstre, og de verticale positive opad; Radius $cA = +1$, $c\gamma = \varepsilon$, $c\pi = \eta$, og hver to af disse Radier indslutte en ret Vinkel, ligesom tilforn er antaget §. 24 og 25. Jeg sætter endnu, at Spidsen af Polygonets ABCD første Vinkel I falder i Horizontens og Verticalens fælles Nulpunct A, og at Forlængningen af den sidste Side VIII falder i Verticalen $A\upsilon$ under Horizonten. Dette forudsat, er Radius $c\upsilon = \eta \,,, \mathrm{IV}^{-\prime} \,,, \mathrm{III}^{-\prime} \,,, \mathrm{II}^{-\prime} \,,, \mathrm{I}^{-\prime} \,,, (-\eta)$, og i Almindelighed, hvis det sphæriske Polygons sidste Side 2m er vertical, og endes i Nulpunctet A, men gaaer forlænget under Horizonten, og i denne Kuglens Position drages Radius $c(n+1)$ til Spidsen af Vinkelen $(n+1)$, eller til sidste Punct af Polygones Side n: saa er samme Radius $c(n+1) = \eta \,,, n^{-\prime} \,,, (n-1)^{-\prime} \,,, (n-11)^{-\prime} \,,, \ldots \,,, \mathrm{II}^{-\prime} \,,, \mathrm{I}^{-\prime} \,,, (-\eta)$.

For at bevise denne Sætning antager jeg den horizontale og den verticale Cirkel for ubevægelige, ligesom i §. 37, og lader Kuglen fra omtalte Position (Fig. 24) først omvæltes 90 verticale Grader, derefter de horizontale Grader I, saa de verticale II, dernæst de horizontale III o. s. f., tilsidst de verticale Grader n. Derved forflyttes Spidsen af Vinkelen $(n+1)$ saa mange Grader, som Kuglen er

(*) Efter Tegningen Fig. 24 og Reglen §. 67 ere Vinklerne III og VII større, men Vinklerne I og V mindre end 180°. At V falder under Projectionsplanet, giør at Siden VI synes at ligge til Høire, da den dog falder til Venstre for den, der paa Sphæren følger Buen IV fra B til C.

er omvæltet, og i Følge §. 33 forandres derved Radius $c(n+1)$ først til $c(n+1),,\eta$, derpaa til $c(n+1),,\eta,,\mathrm{I}'$, dernæst til $c(n+1),,\eta,,\mathrm{I}',,\mathrm{II}'$, saa til $c(n+1),,\eta,,\mathrm{I}',,\mathrm{II}',,\mathrm{III}'$ o. s. f., omsider forandres den til $c(n+1),,\eta,,\mathrm{I}',,\mathrm{II}',,\mathrm{III}',,\ldots,,(n-1)',,n'$, og bliver saa stor som η, fordi det sidste Punct af Siden n, og altsaa det sidste af Radius $c(n+1)$, falder nu i Horizontens Pol π. Af Æqvationen $c(n+1),,\eta,,\mathrm{I}',,\mathrm{II}',,\mathrm{III}',,\ldots,,(n-1)',,n' = \eta$ sluttes, i Følge §. 33: $c(n+1) = \eta,,\overline{n}',,\overline{(n-1)}',,\ldots,,\overline{\mathrm{II}}',,\overline{\mathrm{I}}',,(-\eta)$, hvilket var det som skulde bevises.

§. 70.

Efter foregaaende Formel er derfor i Figur 24 $c\mathrm{I} = +1$, $c\mathrm{III} = \eta,,\overline{\mathrm{II}}',,\overline{\mathrm{I}}',,(-\eta)$, $c\mathrm{V} = \eta,,\overline{\mathrm{IV}}',,\overline{\mathrm{III}}',,\overline{\mathrm{II}}',,\overline{\mathrm{I}}',,(-\eta)$ o. s. f. Desuden er, efter Betingelsen §. 68, $c\mathrm{I}$ parallel med $\mathrm{I}^{\smile}$, $c\mathrm{III}$ med $\mathrm{III}^{\smile}$, $c\mathrm{V}$ med $\mathrm{V}^{\smile}$ ꝛc., Fig. 22. Altsaa er $\mathrm{I}^{\smile} = c\mathrm{I}\,.\,\overline{|\mathrm{I}^{\smile}}$, $\mathrm{III}^{\smile} = c\mathrm{III}\,.\,\overline{|\mathrm{III}^{\smile}}$, $\mathrm{V}^{\smile} = c\mathrm{V}\,.\,\overline{|\mathrm{V}^{\smile}}$ ꝛc. og $(2m-1)^{\smile} = c(2m-1) \times \overline{|(2m-1)^{\smile}}$, §. 65, (ved $(2m-1)^{\smile}$ forstaaes det retlinede Polygons mte og sidste Side). Videre, da $\mathrm{I}^{\smile} + \mathrm{III}^{\smile} + \mathrm{V}^{\smile} + \ldots + (2m-1)^{\smile} = 0$, §. 2: saa er ogsaa $\overline{|\mathrm{I}^{\smile}} + \overline{|\mathrm{III}^{\smile}}\,.\,c\mathrm{III} + \overline{|\mathrm{V}^{\smile}}\,.\,c\mathrm{V} + \ldots\ldots + \overline{|(2m-1)^{\smile}}\,.\,c(2m-1) = 0$, og naar i denne Æqvation isteden for Radii $c\mathrm{III}$, $c\mathrm{V}$, $c\mathrm{VII}$, $\ldots$, $c(2m-1)$ sættes deres Værdier efter §. 69, og derpaa det yderste Punct af hver Radius forflyttes 90 verticale Grader, udkommer Æqvationen $\overline{|\mathrm{I}^{\smile}}\,.\,\eta + \overline{|\mathrm{III}^{\smile}}\,.\,\eta,,\overline{\mathrm{II}}',,\overline{\mathrm{I}}' + \overline{|\mathrm{V}^{\smile}}\,.\,\eta,,\overline{\mathrm{IV}}',,\overline{\mathrm{III}}',,\overline{\mathrm{II}}',,\overline{\mathrm{I}}' + \overline{|\mathrm{VII}^{\smile}}\,.\,\eta,,\overline{\mathrm{VI}}',,\overline{\mathrm{V}}',,\overline{\mathrm{IV}}',,\overline{\mathrm{III}}',,\overline{\mathrm{II}}',,\overline{\mathrm{I}}' + \ldots\ldots + \overline{|(2m-1)^{\smile}}\,.\,\eta,,\overline{(2m-\mathrm{II})}',,\overline{(2m-\mathrm{III})}',,\ldots,,\overline{\mathrm{II}}',,\overline{\mathrm{I}}' = 0$, hvoraf endnu, om skulde behøves, kan udelades $\overline{\mathrm{I}}'$ paa den §. 33 omtalte Maade.

§. 71.

Man har altsaa for ethvert retlinet Polygon, hvori Siderne ei ligge i samme Plan, følgende to Æqvationer:

A.) $s,,\mathrm{I}',,\mathrm{II}',,\mathrm{III}',,\mathrm{IV}',,\mathrm{V}',,\ldots,,(2m)' = s$, §. 68, og

B.)

B.) $\overline{|\mathrm{I}^{\smile}} \cdot \eta + \overline{|\mathrm{III}^{\smile}} \cdot \eta \,,, \mathrm{II}^{-\prime} ,, \mathrm{I}^{-\prime} + \overline{|\mathrm{V}^{\smile}} \cdot \eta \,,, \mathrm{IV}^{-\prime} ,, \mathrm{III}^{-\prime} ,, \mathrm{II}^{-\prime} ,, \mathrm{I}^{-\prime} + \overline{|\mathrm{VII}^{\smile}} \cdot \eta \,,, \mathrm{VI}^{-\prime} ,,$
$\mathrm{V}^{-\prime} ,, \mathrm{IV}^{-\prime} ,, \mathrm{III}^{-\prime} ,, \mathrm{II}^{-\prime} ,, \mathrm{I}^{-\prime} + \ldots + \overline{|(2m - \mathrm{I})^{\smile}} \cdot \eta \,,, (2m - \mathrm{II})^{-\prime} ,, (2m - \mathrm{III})^{-\prime} ,,$
$\ldots ,, \mathrm{III}^{-\prime} ,, \mathrm{II}^{-\prime} ,, \mathrm{I}^{-\prime} = 0$, §. 70.

At disse Æqvationer maae kunne forstaaes uden Hielp af det foregaaende, vil jeg her igientage Tegnenes Betydning.

Siderne tælles saaledes at den foregaaende ophører der, hvor den følgende begynder.

Polygonets første, anden, tredie, ..., mte eller sidste Side betegnes efter Ordenen ved $\mathrm{I}^{\smile}$, $\mathrm{III}^{\smile}$, $\mathrm{V}^{\smile}$, $\mathrm{VII}^{\smile}$, ..., $(2m - \mathrm{I})^{\smile}$, Fig. 22.

Sidernes Længder ved $\overline{|\mathrm{I}^{\smile}}$, $\overline{|\mathrm{III}^{\smile}}$, $\overline{|\mathrm{V}^{\smile}}$, $\overline{|\mathrm{VII}^{\smile}}$, ..., $\overline{|(2m - \mathrm{I})^{\smile}}$.

Hver Sides Afvigning fra foregaaendes Forlængning ved et effent Tal II, IV, VI, ..., eller 2m, som er een Unitet større end det uefne, der tiener til foregaaende Sides Mærke.

Vinkelen, som Planet igiennem den midterste og følgende af tre sammenhængende Sider afviger fra midterste og foregaaendes Plan, betegnes ved det uefne Tal I, III, V, ꝛc., eller $(2m - \mathrm{I})$, der tilhører den midterste Side.

Alle Vinklerne ere positive. Om de skal være større eller mindre end to Rette, sees bedst af §. 66 og 67.

Vinklerne II, IV, VI, ..., 2m maales i Verticalen, eller i en Cirkel, der staaer sænkret paa Horizonten, hvori Vinklerne I, III, V, VII, ..., $(2m - \mathrm{I})$ maales, §. 25. Begge Cirkler overskiære hinanden i Radius $+ 1$.

Sinus til 90 Grader, eller $\sqrt{-1}$ (§. 6), betegnes i den verticale Cirkel ved η, og i den horizontale ved ε; ε^2 saavelsom η^2 er $= -1$, i Følge §. 5.

Sætter man at n er = II, IV, ..., eller 2m, da betegnes $\cos. n + \eta \sin. n$ ved n', og $\frac{1}{\cos. n + \eta \sin. n}$ ved $n^{-\prime}$, §. 7.

Er $n = \mathrm{I}, \mathrm{III}, \mathrm{V}, \ldots$, eller $(2m - \mathrm{I})$, da betyder n' det samme som $\cos. n + \varepsilon \sin. n$, og $n^{-\prime}$ det samme som $\frac{1}{\cos. n + \varepsilon \sin. n}$, §. 7.

Cos. n og sin. n ere i første og tredie Qvadrant ligestilte (af samme Retning), men i anden og fierde modsatte, §. 6.

Tegnet „ har kun halv den Betydning som det sædvanlige Multiplicationstegn; thi den Linie i Multiplicandums Udtryk, der ligger udenfor Planet af Cirkelbuen i Multiplicators Mærke, bliver ved Operationen uforandret; naar f. Ex. 2, 3ε og 4η ere rette Linier, da er $(2 + 3\varepsilon + 4\eta)$ „ II' det samme som $3\varepsilon + (2 + 4\eta) . (\mathrm{cos.\,II} + \eta\,\mathrm{sin.\,II})$; ligeledes er $(2 + 3\varepsilon + 4\eta)$ „ I' det samme som $4\eta + (2 + 3\varepsilon) . (\mathrm{cos.\,I} + \varepsilon\,\mathrm{sin.\,I})$.

Desuden maa iagttages, at Operationen skeer i den Orden, som Factorerne følge hinanden fra Venstre til Høire; saaledes maa man f. Ex., naar Værdien af $(2+3\varepsilon+4\eta)$ „ I' „ II' skal findes, først søge Værdien af $(2+3\varepsilon+4\eta)$ „ I' $\begin{bmatrix} = 4\eta + 2\mathrm{cos.I} + 2\varepsilon\,\mathrm{sin.I} \\ \quad - 3\,\mathrm{sin.I} + 3\varepsilon\mathrm{cos.I} \end{bmatrix}$, og derefter Værdien af $\begin{bmatrix} 4\eta + 2\mathrm{cos.I} + 2\varepsilon\,\mathrm{sin.I} \\ \quad - 3\,\mathrm{sin.I} + 3\varepsilon\mathrm{cos.I} \end{bmatrix}$ „ II'.

s kan betegne en ret Linie af hvad Længde og Direction man vil; saaledes kan man i Æqvationen *A* sætte isteden for s et Led af Æqvationen *B*, og derved forandre Ledets Udtryk; Er f. Ex. $s = \lceil \mathrm{III}^{\circ} . \eta$ „ $\mathrm{II}^{-\prime}$ „ $\mathrm{I}^{-\prime}$ = det andet Led i *B*, da forvandles Æqvationen *A* til $\lceil \mathrm{III}^{\circ} . \eta$ „ IV' „ V' „ VI' „ ... „ $(2m)' = \lceil \mathrm{III}^{\circ} . \eta$ „ $\mathrm{II}^{-\prime}$ „ $\mathrm{I}^{-\prime}$, §. 32.

Videre har jeg ikke gaaet i disse Polygoners Undersøgelse.

Om

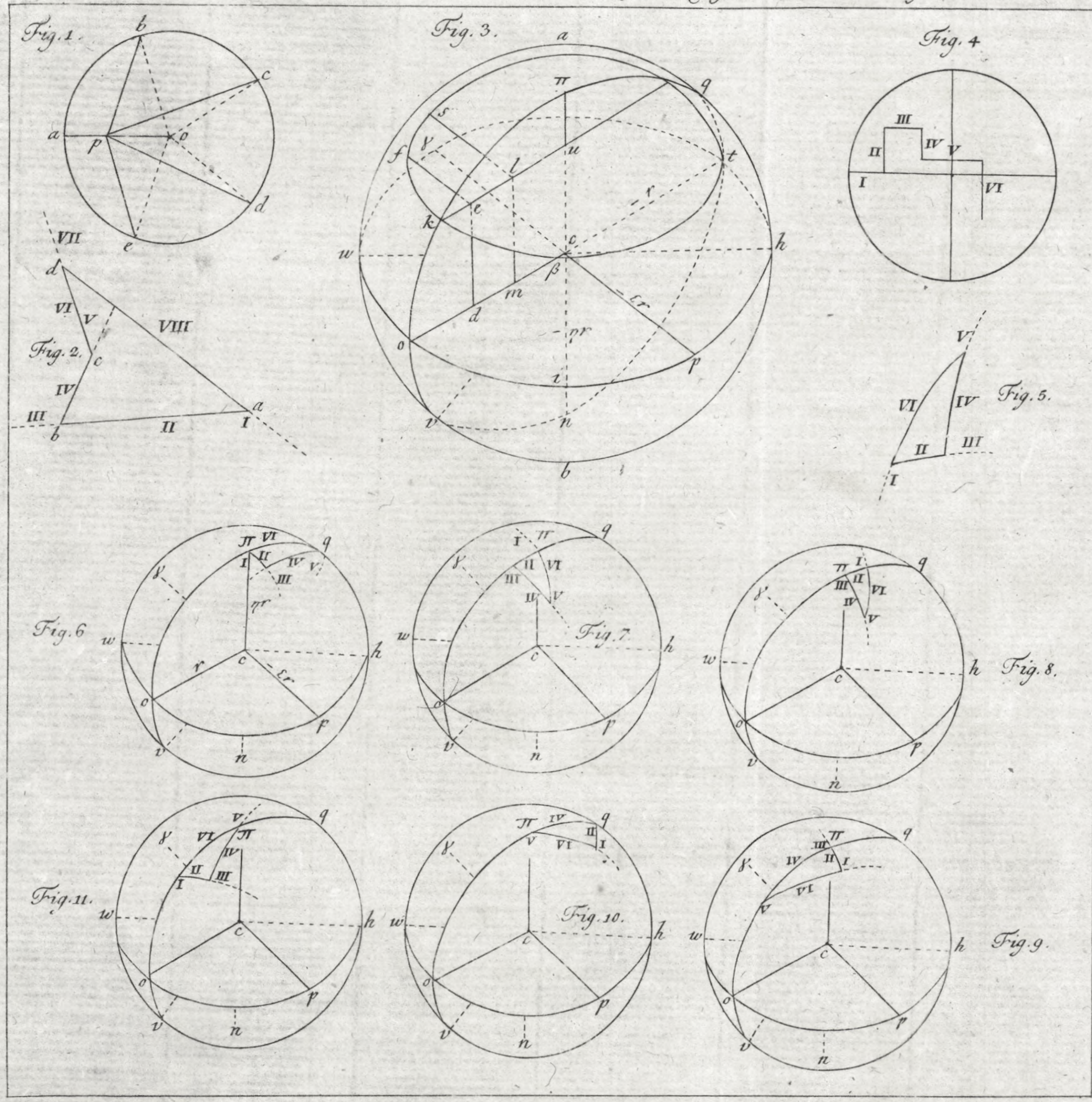


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.

Fig. 12.

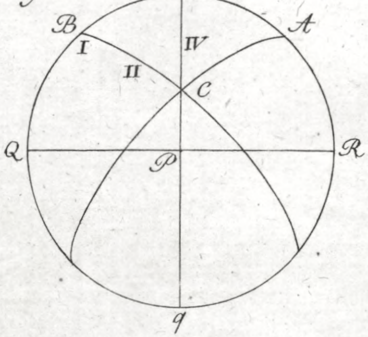


Fig. 13.

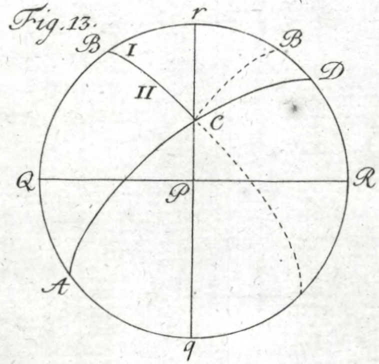


Fig. 14.

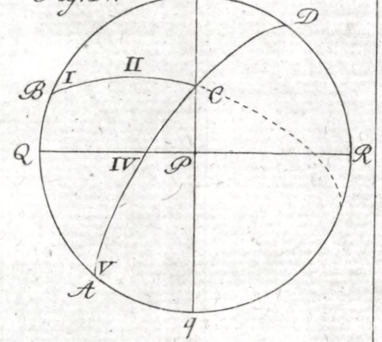


Fig. 15.

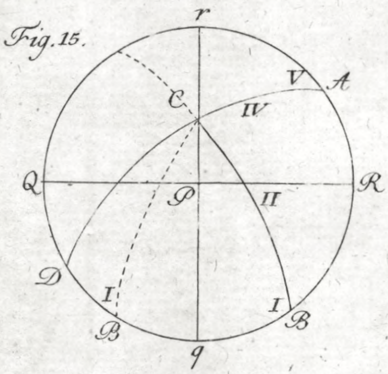


Fig. 16.

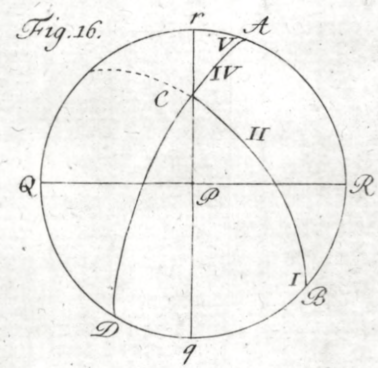


Fig. 17.

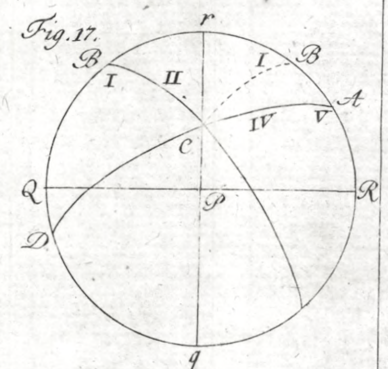


Fig. 18.

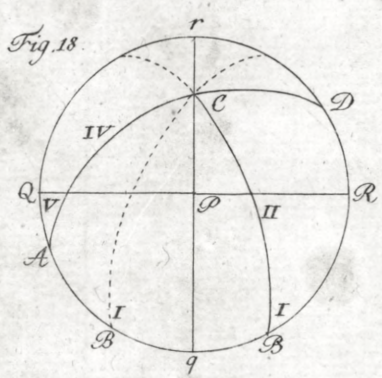


Fig. 19.

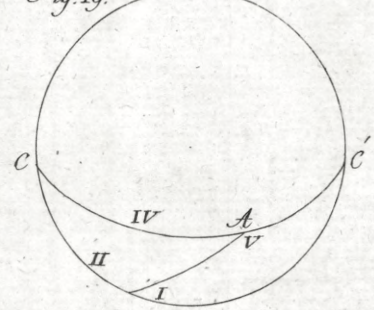


Fig. 20.

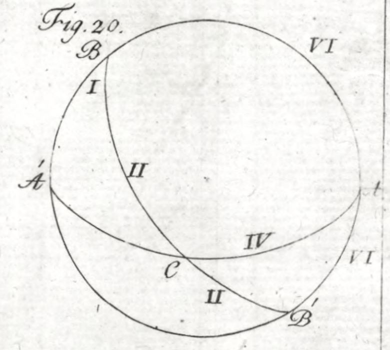


Fig. 21.

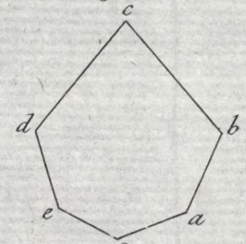
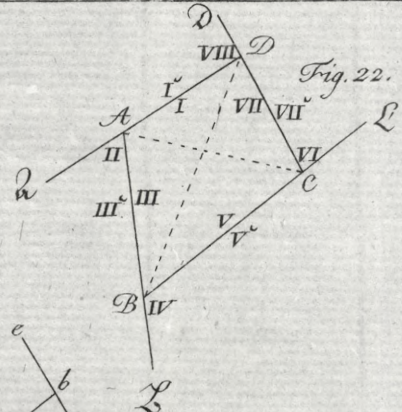


Fig. 22.



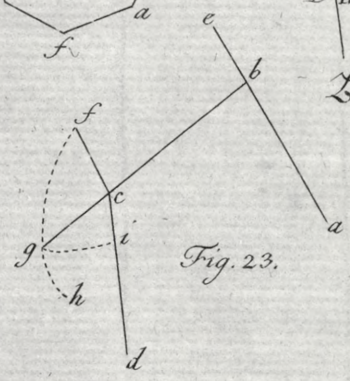


Fig. 23.

Fig. 24.